פתרון תרגיל 3

.1

(א) $a_1 = \sqrt{6},\ a_{n+1} = \sqrt{6a_n}$

הוכחה: נראה באינדוקציה כי a_n מונוטונית עולה וחסומה ע"י 6.

מונוטוניות: עבור $n = 1$ מתקיים $a_2 = \sqrt{6\sqrt{6}} > \sqrt{6}$. נניח כי עבור n כלשהוא מתקיים $a_{n+1} > a_n$. אזי מתקיים $a_{n+2} = \sqrt{6a_{n+1}} > \sqrt{6a_n} = a_{n+1}$. כעת נראה כי $a_n < 6$ לכל n. ברור כי $a_2 = \sqrt{6\sqrt{6}} < 6$. נניח כי $a_n < 6$ עבור n כלשהוא. אזי $a_{n+1} = \sqrt{6a_n} < \sqrt{6 \cdot 6} = 6$. כלומר a_n מוטונית עולה וחסומה, לכן מתכנסת. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ונקבל את המשוואה $l = \sqrt{6l}$ שפתרונה הוא $l = 6$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\} = 6$.

(ב) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$

נוכיח כי הסדרה מונוטנית יורדת, כלומר $a_{n+1} - a_n < 0$.

$a_{n+1} - a_n = (a_n + 1/a_n)/2 - a_n = (a_n + 1/a_n - 2a_n)/2 = (1/a_n - a_n)/2.$ כלומר יש להראות כי $a_n > 1$. ברור כי $a_1 = 10 > 1$. נניח כי $a_n > 1$ עבור n כלשהוא, ונניח בנוסף כי הטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2 > 1$. נקבל $a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 > 0$, או $a_n > 1$ וסיימנו. נשים לב כי הראנו גם כי $\{a_n\}$ חסומה מלרע ע"י 1 ולכן מתכנסת. נסמן $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ ונקבל $l = (l + 1/l)/2$, ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\} = 1$

(ג) $a_1 = 1/10,\ a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. (הוכחה באינדוקציה דומה לזו שב ב החל מ $n = 2$.)

.2

פתרון: קל להראות באינדוקציה ש $a_n \geq 0$ לכל n. ולכן $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{a_n} \geq 0$ כלומר הסדרה מונוטונית עולה. נניח ש $\{a_n\}$ הייתה חסומה, לכן היא הייתה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L כלשהוא. לכן $L = \lim a_{n+1} = \lim(a_n + \dfrac{1}{a_n}) = L + \dfrac{1}{L}$ ולכן $L = L + \dfrac{1}{L}$ ולכן $\dfrac{1}{L} = 0$.
אבל אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, וזו סתירה לכך שהסדרה מתכנסת, ולכן היא אינה חסומה.