שילוש ולכסון אוניטרי ואוג'

אופרטור T ניתנת לשילוש אוניטרי אם קיים בסיס אונ' כך ש- $[T]_B$ משולשית

(שילוש אוג' בהתאמה) (אוג' זה מעל $\mathbb{R}$)
לכסון אוניטרי/אוג' גם בדומה

A מטריצה, ניתנת לשילוש אוניטרי את קיימת P אוניטרית כך ש-
$P^{-1}AP =$ משולשית

משפט: T ניתנת לשילוש אוניטרי/אוג' $\Longleftrightarrow$ הפא מתפ' כמו התנאי הרגיל לשילוש

(לכן מעל $\mathbb{C}$ תמיד זה אפשרי)

אלגוריתם למציאת P אוניטרית כך ש- $P^{-1}AP$ משולשית

1. נמצא לפי אלג' השילוש הרגיל מטריצה Q כך ש- $Q^{-1}AQ$ משולשית עליונה.

2. Q הפיכה ולכן עמודותיה הן בסיס שנסמנו B_1 ובעצם נשים לב ש- $Q = [I]_S^{B_1}$ (סטנדרטי)

3. נפעיל על B_1 תהליך גרם שמידט לקבלת בסיס אונ' B_2.

4. נגדיר $P := [I]_S^{B_2}$ (כלומר נסדר את B_2 בעמודות)

5. נשים לב - $P = Q \cdot \underbrace{[I]_{B_1}^{B_2}}_{\text{נסמן } C}$ והיא אוניטרית!! (כי עמודותיה בסיס אונ')

הערה: כיוון ש- B_2 התקבל מ- B_1 ע"י גרם שמידט אזי C היא משולשית עליונה

ונקבל $P^{-1}AP = (QC)^{-1}A(QC) = C^{-1}\underbrace{Q^{-1}AQ}_{\text{משולשית עליונה}}C$

$= C^{-1} \cdot \text{משולשית עליונה} \cdot C \overset{!}{=}$ משולשית עליונה

(ציין שאם C משולשית עליונה ולכן גם C^{-1})

(2)

לכסון אוניטרי:

(+) T לכסינה אוניטרית אם יש בסיס אונ' B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.
(נאמר ש-T לכסינה או"נ אם זה אפשרי מעל $\mathbb{R}$)

(+) A (מטריצה) לכסינה אוניטרית (או"נ) אם קיימת P אוניטרית (או"נ) כך ש- $P^{-1}AP =$ אלכסונית.

(1) משפט: A נורמלית $\Longrightarrow$ ו"ע השייכים לע"ע שונים הם מאונכים.

(2) משפט: A לכסינה אוניטרית $\Longleftrightarrow$ A נורמלית.

(3) משפט: A לכסינה או"נ $\Longleftrightarrow$ A סימטרית.

אלג' לכסון אוניטרי: תהי A נורמלית. נמצא P אוניטרית כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית:

1. נמצא ע"ע ל-A. עבור כל ע"ע נמצא בסיס למ"ע

עבור λ_1 יש בסיס למ"ע $B_{\lambda_1}=\{v_1,\dots,v_k\}$

עבור λ_2 יש בסיס למ"ע B_{λ_2}

⋮

2. נעשה גרם שמידט על הבסיסים הנ"ל (על כל אחד בנפרד)

$B_{\lambda_1} \xrightarrow{\text{גרם שמידט}} B'_{\lambda_1}$ בסיס אונ' למ"ע של λ_1

$B_{\lambda_2} \xrightarrow{\text{ג"ש}} B'_{\lambda_2}$ " ——— " λ_2

וכו'.

3. נשים לב - B'_{λ_i} הם בסיסים למרחבים העצמיים ולכן עדיין בנויים מוקטורים עצמיים.
בנוסף, עבור $i\neq j$ וקטורים מ- B'_{λ_i} מאונכים לוקטורים מ- B'_{λ_j} שהרי A נורמלית ויש את משפט (1) לעיל.

4. מ-3 נובע ש- $\bigcup B'_\lambda$ בסיס אונ' שמורכב מו"ע.
נסדר אותם כעמודות במטריצה P וזו P הדרושה

לכסון א"ג: אותו תהליך כמו לכסון אוניטרי רק שכדי שיהיה אפשרי למצוא P א"ג A צריכה להיות סימטרית ואז נקבל שאכן P א"ג

דוגמה: תהי $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ האם A לכסינה א"ג

אם כן מצאו P א"ג כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית

פתרון: A סימטרית ולכן לכסינה א"ג.

נמצא ע"ע וו"ע

בהשארתכם את הדרך תעשו בעצמכם

ונקבל

	$\lambda_1=2$	$\lambda_2=8$
בסיס למ"ע	$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$	$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

B_{λ_1}, B_{λ_2}

נפעל גרם שמידט על $B_{\lambda_1} \rightarrow \dots \rightarrow \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\right\}$

נפעל גרם שמידט על B_{λ_2} $\xrightarrow{\text{כלומר במקרה זה רק ננרמל כי יש וקטור יחיד}}$ $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\right\}$

ונקבל P א"ג שמלכסנת את A:

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}$$