

תרגיל 5 אינפי 3 תשע"ו

15 בנובמבר 2015

1. הוכיחו בעזרת רציפות:

(א) הקבוצה $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x + xy \leq 5\}$ סגורה ב- \mathbb{R}^2 .

(ב) קבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ פתוחה ב- $M_n(\mathbb{R})$.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) תהיינה d_1, d_2 מטריקות מעל קבוצה X ותהיינה ρ_1, ρ_2 מטריקות מעל קבוצה Y . תהי $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, \rho_1)$ רציפה. אזי גם $f : (X, d_2) \rightarrow (Y, \rho_2)$ רציפה.

(ב) תהי $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי רציפה אם ורק אם לכל **כדור פתוח** $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X .

(ג) תהי $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים. אזי רציפה אם ורק אם לכל **כדור סגור** $O \subseteq Y$, $f^{-1}(O)$ סגורה ב- X .

3. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $a \in X$.

(א) הוכיחו כי הפונקציה $f_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_a(x) = d(x, a)$ היא רציפה.

(ב) הסיקו שלכל $r > 0$ כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

4. האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש?

$$\text{(א) } f(x) = \sin x^2 \text{ ב-}\mathbb{R}.$$

$$\text{(ב) } f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} \text{ בתחום } D = \{(x, y) : |x| \leq |y|, y \neq 0\}$$

5. תהי פונקציה המוגדרת בתחום D ורציפה לפי המשתנה x , כלומר אם מקבעים את $y = y_0$ מקבלים פונקציה רציפה של משתנה אחד:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$$

(א) נניח ש- f רציפה גם לפי y . האם f רציפה?

(ב) נניח ש- f רציפה במ"ש לפי y . האם f רציפה?

(ג) נניח ש- f מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y : קיים K עבורו:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K \cdot |y_1 - y_2| \text{ האם } f \text{ רציפה?}$$

6. בשעות הפנאי, ציירו מסילות וגרפים של פונקציות עם כמה משתנים בתוכנה מתמטית כלשהי (שלמדתם בקורס בשימושי מחשב. אם מצליחים אפשר גם בוולפרם). קחו פונקציות מוכרות (מסילה המתארת מעגל או פונקציה המתארת חרוט, למשל) ו"שחקו" איתן - שנו את החזקה, החליפו סימן חיובי בשלילי, הכפילו את המשתנים בקבוע וכן הלאה, וראו איך הפונקציות משתנות.