פתרונות – תרגיל בית 1 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

1) לפניכם ציונים בסטטיסטיקה של 10 סטודנטים:
89, 73, 60, 63, 95, 85, 81, 75, 80, 75.
א. חשב את החציון, הממוצע, השכיח, ואת אמצע הטווח.
ב. הסטודנט שציונו 60 קיבל העלאת ציון ל-65. הסבר איך השפיעה העלאת הציון על כ"א מהמדדים בסעיף א' (בלי חישוב).

2) במאפיית לחם 3 תנורי אפייה. בתנור א' נאפים 25% מכלל הכיכרות, בתנור ב' נאפים 35% מכלל הכיכרות ובתנור ג' נאפים 40% מכלל הכיכרות. אחוז הכיכרות השרופים בתנור א' הוא 5%, בתנור ב' 4% ובתנור ג' 2%.
א. מה ההסתברות שכיכר לחם שמוכנס לאפייה יישרף?
ב. מה ההסתברות שכיכר לחם שרוף נאפה בתנור א'?
ג. מה ההסתברות שכיכר לחם שרוף לא נאפה בתנור ב'?

3) בקופסה 4 מטבעות. נסמן ב- p_i את ההסתברות לקבלת עץ בהטלת המטבע ה- i.
נתון: $p_1 = 0,\ p_2 = 0.25,\ p_3 = 0.5,\ p_4 = 0.75$. מטבע נבחר באופן אקראי מהקופסה.
א. המטבע שנבחר מוטל פעם אחת. מהי ההסתברות לקבל עץ בהטלה זו?
ב. ידוע שהתקבל עץ בהטלת המטבע שנבחר. מהי ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא מטבע מספר 4?
ג. המטבע שנבחר הוטל פעם אחת והתקבל עץ. מטילים שוב את אותו מטבע, מהי ההסתברות לקבל עץ בהטלה זו?
ד. המטבע שנבחר מוטל שוב ושוב עד קבלת עץ. מה ההסתברות שמספר ההטלות הוא בדיוק 3?

4) שישה זוגות נשואים נכנסו לבית קפה. מאחר והיה רק שולחן אחד פנוי, הושיבה המארחת 4 מהאורחים מסביב לשולחן ואילו השאר נשארו להמתין בכניסה. בהנחה שהמארחת בחרה את 4 האורחים באופן מקרי.
א. מה ההסתברות שליד השולחן אין ולא זוג נשוי אחד?
ב. מה ההסתברות שבני הזוג לוי נאלצו להיפרד?

5) מדרגים חמש נשים וחמישה גברים לפי ציוניהם במבחן. נניח שאין שני ציונים זהים, ושכל !10 האופציות שוות-הסתברות. מסמנים ב- X את המקום הגבוה ביותר בין הנשים. מצא את $P(X=i)$ לכל $1 \le i \le 10$.

פתרונות

פתרון 1

א). נסדר ראשית את הציונים לפי הסדר

60, 63, 73, 75, 75, 80, 81, 85, 89, 95.

החציון אם כך הוא $77.5 = \frac{80+75}{2}$.

הממוצע הוא

$$\frac{95+89+85+81+80+75+75+83+63+60}{10} = 77.7$$

השכיח הוא 75 (שמופיע פעמיים בעוד שהאחרים מופיעים פעם אחת)

ואמצע הטווח הוא $77.5 = \frac{95+60}{2}$.

ב). כאשר מעלים את ציון ה-60 ל-65, החציון לא עולה (משום ש-65 נמוך ממנו), הממוצע עולה (כי הוא מושפע ישירות מכל ערך במדגם), השכיח לא משתנה (משום שהשכיח מופיע פעמיים בעוד ש-60 הופיע במקור פעם אחת ועכשיו 65 מופיע פעם אחת), ואמצע הטווח עולה (משום ש-60 היה המינימום ועכשיו הוא 63).

פתרון 2

נגדיר את המאורעות: A – הלחם נאפה בתנור א', B – הלחם נאפה בתנור ב', C – הלחם נאפה בתנור ג'. D – הלחם שרוף.

א. נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(D) = P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B) + P(C)\cdot P(D|C),$$

כאשר מהנתונים $P(D|A) = 0.05,\quad P(D|B) = 0.04,\quad P(D|C) = 0.02$

והצבה בנוסחה נותנת $0.25\cdot0.05+0.35\cdot0.04+0.4\cdot0.02 = 0.0345$.

ב. נעזר בתוצאת סעיף א' ונציב בנוסחת בייס

$$P(A|D) = \frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.25\cdot 0.05}{0.0345} = 0.362$$

ג. המאורע "לא נאפה בתנור ב'" מתורגם ל-"נאפה בתנור א' או בתנור ג'" $\left(\bar{B}=A\cup C\right)$.

שוב נעזר בתוצאת סעיף א' ונציב בנוסחת בייס:

$$P(\bar{B}\,|\,D)=\frac{P(A)\cdot P(D\,|\,A)+P(C)\cdot P(D\,|\,C)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.05+0.4\cdot 0.02}{0.0345}=0.594$$

<u>פתרון 3</u>

נסמן- P_i={ קבלת עץ בהטלת מטבע i }. נתון: $P_1=0,P_2=\frac{1}{4},P_1=\frac{1}{2},P_4=\frac{3}{4}$

א. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(tree\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(tree\,|\,coin\ i\right)P\left(coin\ i\right)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

ב. ההסתברות המבוקשת מתקבלת מנוסחת בייס:

$$P\left(coin\ \#4\,|\,tree\right)=\frac{P\left(coin\ \#4\cap tree\right)}{P\left(tree\right)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{2}$$

ג. ההסתברות המותנה המבוקשת:

$$P\left(2\ trees\,|\,tree\right)=\frac{P\left(2\ trees\cap tree\right)}{P\left(tree\right)}=\frac{P\left(2\ trees\right)}{P\left(tree\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{3}{8}}=\frac{7}{12}$$

ד. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(3\text{ throws}\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(3\text{ throws}\,|\,coin\ \#i\right)\cdot P\left(coin\ \#i\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=0.078125$$

פתרון 4

א. $\frac{12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{16}{33}=0.485$, או בדרך אחרת $\frac{\binom{6}{4}2^4}{\binom{12}{4}}=0.485$

ב. $\frac{4\cdot 8}{12\cdot 11}+\frac{8\cdot 4}{12\cdot 11}=\frac{16}{33}$, או בדרך אחרת $\frac{\binom{2}{1}\binom{10}{3}}{\binom{12}{4}}=0.485$

פתרון 5

נסמן ב-Ω את קבוצת הבחירות של 5 מקומות מתוך 10, אזי $|\Omega|=\binom{10}{5}$. נאמר כי אלו הם המקומות שבהן נמצאות נשים. לכל בחירה כזו יש בדיוק $(5!)^2$ אופציות לסדר בהן את הנשים והגברים בסולם, ולכן המרחב (Ω,P) מתפלג אחיד.

נסמן ב-A_k את קבוצת הבחירות של 5 מקומות מתוך 10 כך שהמקום הגבוה ביותר איננו עולה על k. כמובן ש-$|A_k|=0$ לכל $k\le 4$.

עבור $k\ge 5$, הגודל של A_k שווה לגודל של קבוצת הבחירות של 5 איברים מתוך k פחות הגודל של קבוצת הבחירות של 5 איברים מתוך $k-1$, דהיינו

$$|A_k|=\binom{k}{5}-\binom{k-1}{5}=\binom{k-1}{4}.$$

לכן, $P(X=k)=\frac{|A_k|}{|\Omega|}=\frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{10}{5}}$ לכל $k\ge 5$,

ועבור $k\le 4$ $\quad P(X=k)=0$.