טופולוגיה - תרגול 1

למה: (שימושית) תהא A קבוצה. נניח שלכל $x\in A$ קיים E_x

כך ש- $x\in E_x\subset A$, אזי $A=\bigcup_{x\in A} E_x$

הוכחה: $\subset$: לכל x, $E_x\subset A$ ולכן $\bigcup E_x\subset A$

$\supset$: יהי $x\in A$. אזי קיים E_x כך ש- $x\in E_x \Leftarrow x\in\bigcup E_x$. מש"ל

הגדרה: תהא $f: X\to Y$ פונקציה. יהיו $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$ תת קבוצות.

אז: התמונה של A היא: $f(A)=\{f(x): x\in A\}$.

התמונה ההפוכה של B היא: $f^{-1}[B]=\{x\in X: f(x)\in B\}$

טענה: 1. אם $A\subseteq B\subseteq Y$, אזי $f^{-1}[A]\subseteq f^{-1}[B]\subseteq X$.

2. אם $A\subseteq B\subseteq X$ אזי $f(A)\subseteq f(B)\subseteq Y$.

הוכחה: 1. יהי $a\in f^{-1}[A]$. כלומר, קיים $x\in A$ כך ש- $f(a)=x$

$A\subseteq B$ ולכן $x\in B$, לכן $a\in f^{-1}[B]$.

2. יהי $a\in f(A)$. כלומר יש $x\in A$ כך ש- $f(x)=a$. $A\subseteq B$ ולכן $x\in B$,

לכן $a\in f(B)$.

טענה: 1. $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right]=\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$

2. $f^{-1}\left[\bigcap B_i\right]=\bigcap f^{-1}[B_i]$

הוכחה: 1. $\subseteq$: יהי $x\in f^{-1}[\bigcup B_i]$, כלומר $f(x)\in\bigcup B_i \Leftarrow$ קיים i_0 כך ש-

$f(x)\in B_{i_0} \Leftarrow x\in f^{-1}[B_{i_0}] \Leftarrow x\in\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$

$\supseteq$: יהי $x\in\bigcup f^{-1}[B_i] \Leftarrow$ קיים i כך ש- $x\in f^{-1}[B_i] \Leftarrow B_i\subset\bigcup B_i$ ולכן

$x\in f^{-1}[\bigcup B_i]$

2. $\subseteq$: יהי $x\in f^{-1}[\bigcap B_i] \Leftarrow f(x)\in\bigcap B_i \Leftarrow \forall i\ f(x)\in B_i \Leftarrow \forall i\ x\in f^{-1}[B_i]$

$\Leftarrow x\in\bigcap f^{-1}[B_i]$

$\supseteq$: יהי $x\in\bigcap f^{-1}[B_i] \Leftarrow \forall i\ x\in f^{-1}[B_i] \Leftarrow \forall i\ f(x)\in B_i \Leftarrow f(x)\in\bigcap B_i \Leftarrow$

$x\in f^{-1}[\bigcap B_i]$

הוכח / הפרך: 1. $f(\bigcup A_i)=\bigcup f(A_i)$

2. $f(\bigcap A_i)=\bigcap f(A_i)$

פתרון: 1. הוכחה: $\supseteq$: לכל i: $A_i\subseteq\bigcup A_i$ ולכן $f(A_i)\subset f(\bigcup A_i) \Leftarrow \bigcup f(A_i)\subset f(\bigcup A_i)$

$\subseteq$: יהי $x\in f(\bigcup A_i) \Leftarrow$ קיים $a\in\bigcup A_i$ כך ש- $f(a)=x$

בפרט קיים i כך ש- $a\in A_i$ $\Leftarrow$ $\exists i: x\in f(A_i)$ $\Leftarrow$ $x\in\bigcup f(A_i)$

ג. דוגמא נגדית: נקח: $X=\{1,2\}$ $Y=\{3\}$. $f(1)=f(2)=3$.

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$

אז: $A\cap B=\emptyset$ $f(\emptyset)=\emptyset$

אולם: $f(A)=f(B)=\{3\}$ $\Rightarrow$ $f(A)\cap f(B)=\{3\}$

הגדרות:

א. f על: $f:X\to Y$ נקראת על אם $\forall y\in Y, \exists x\in X: f(x)=y$

ב. חח"ע: $f:X\to Y$ נקראת חח"ע אם: $x_1\neq x_2$ $\Rightarrow$ $f(x_1)\neq f(x_2)$

תרגיל 4. א. כתבו והוכיחו איזה כיוון של הכלה מתקיים?

ב. הוכיחו: אם f חח"ע אז: $f(\bigcap A_i)=\bigcap f(A_i)$

ג. האם גם הכיוון השני נכון?

פתרון:

א. $\forall i\ \bigcap A_i\subseteq A_i$, לכן $\forall i\ f(\bigcap A_i)\subseteq f(A_i)$ $\Rightarrow$ $f(\bigcap A_i)\subseteq\bigcap f(A_i)$

ב. יהי: $x\in\bigcap f(A_i)$ $\Rightarrow$ $\forall i: x\in f(A_i)$ $\Rightarrow$ $\forall i, \exists a_i\in A_i: f(a_i)=x$.

כיוון ש f חח"ע $\forall i,j\ a_i=a_j$, לכן $\forall i: a=a_i$ $\forall i: a\in A_i$ $\Rightarrow$

$a\in\bigcap A_i$ $\Rightarrow$ $x\in f(\bigcap A_i)$

ג. כן. הוכחה: יהי $x_1\neq x_2\in X$.

$\emptyset=f(\emptyset)=f(\{x_1\}\cap\{x_2\})=\{f(x_1)\}\cap\{f(x_2)\}$

לכן $f(x_1)\neq f(x_2)$

~~תרגיל: מתי f ... $f(A^c)=(f(A))^c$~~

הגדרה: תהי $A\subseteq X$. $A^c=X\setminus A$.

תרגיל: מצאו תנאי מספק והכרחי על f כך ש- $f(A^c)=(f(A))^c$

פתרון: נראה, בפשטות, שאם f על וחח"ע זה מתקיים

נניח: $Y=\{2,3\}$ $X=\{1\}$ $f(1)=2$

אז אם $A=\{1\}$ $A^c=\emptyset$ $f(A^c)=f(\emptyset)=\emptyset$

אבל $f(A)=\{2\}$ $\Leftarrow$ $(f(A))^c=\{3\}$

כמו כן, נראה שאם f על אבל לא חח"ע, זה לא מתקיים.

נניח: $Y=\{3\}$ $X=\{1,2\}$ $f(1)=f(2)=f(3)$

[illegible]

ניקח $A=\{1\}$

$f(A^c)=f(\{2\})=\{3\}$. $f(A)^c=\{2\}$

אבל: $f(A)=\{3\} \Rightarrow (f(A))^c=\emptyset$.

נוכיח שאם f חח"ע ועל הטענה נכונה.

⊆: יהי $x\in f(A^c)$ ⇐ יש $a\in A^c$ כך ש- $f(a)=x$. בגלל החח"ע,

לכל $b\in A$, $f(b)\neq x$ ⇐ $x\notin f(A)$ ⇐ $x\in(f(A))^c$

⊇: יהי $x\in f(A)^c$. בפרט $x\in Y$, $x\notin f(A)$. בגלל ש-f על, יש $a\in X$

כך ש- $f(a)=x$. $a\notin A$ (אחרת $x\in f(A)$). לכן $a\in A^c$ ⇐ $x\in f(A^c)$

<u>תזכורת:</u> כללי דה-מורגן:

1. $(\cap A_i)^c=(\cup A_i^c)$
2. $(\cup A_i)^c=(\cap A_i^c)$

<u>תרגיל:</u> התכונות הבאות שקולות עבור קבוצה כלשהי X:

1. אם $\cup A_i=X$ אז יש מס' סופי של קבוצות $A_{i_1}\ldots A_{i_n}$ כך ש: $A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_n}=X$
2. אם $\cap A_i=\emptyset$ " " " " " " " $A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_n}=\emptyset$

<u>הוכחה</u>

1⇐2 נניח $\cap A_i=\emptyset$ ⇐ $(\cap A_i)^c=X$ ⇐ $\cup A_i^c=X$ ⇐ יש $i_1\ldots i_n$

כך ש: $A_{i_1}^c\cup\ldots\cup A_{i_n}^c=X$ ⇐ $(A_{i_1}^c\cup\ldots\cup A_{i_n}^c)^c=\emptyset$ ⇐ $A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_n}=\emptyset$

2⇐1: נניח $\cup A_i=X$ ⇐ $(\cup A_i)^c=\emptyset$ ⇐ $\cap A_i^c=\emptyset$ ⇐ יש $i_1\ldots i_n$

כך ש: $A_{i_1}^c\cap\ldots\cap A_{i_n}^c=\emptyset$ ⇐ $(A_{i_1}^c\cap\ldots\cap A_{i_n}^c)^c=X$ ⇐ $A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_n}=X$.

<u>הערה:</u> התכונה הנ"ל לא מתקיימת לכל קבוצה X. למשל: $X=(0,1)$

$A_n=(\frac{1}{n},1)$. אז $\cup A_i=X$. אבל $A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_n}=(\frac{1}{i_n},1)$ לכל

מס' סופי של קבוצות שניקח.

<u>הגדרה:</u> $X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$

<u>למשל:</u> $Y=X=\{1,2\}$. $X\times Y=\{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$

<u>שאלה:</u> האם לכל $Z\subset X\times Y$ קיימים $A\subset X, B\subset Y$ כך ש- $Z=A\times B$?

<u>תשובה:</u> לא. למשל: $Z=\{(1,1)(2,2)\}$. אז $1\in A$, $2\in B$, ולכן

$(1,2)\in A\times B$ ולכן $A\times B\neq Z$.

<u>תרגיל:</u> הוכח/הפרך: $(A\times B)^c=A^c\times B^c$

סעיף ג'

דוגמא נגדית נקח $A=\{1\}$, $B=\{2\}$

$A\times B=\{(1,2)\}$

$(A\times B)^c=\{(1,1),(2,2),(2,1)\}$

$A^c=\{2\}$, $B^c=\{1\}$

$A^c\times B^c=\{(2,1)\}$