הרצאה 8

נכתב על ידי יהונתן רגב

תזכורת

משפט (קיילי המילטון)

$p_A(A) = 0$.

<u>ניסיון הוכחה</u>:

$$p_A(x) = \det(x \cdot I - A)$$

$$p_A(A) = \det(A \cdot I - A) = \det(0) = 0$$

לא נכון, שכן:

$$\det(x \cdot I - A) = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

ולא ניתן להציב את המטריצה A במקום x, שכן $A - a_{ii}$ לא מוגדר.

תזכורת

$$M \cdot adj(M) = \det(M) \cdot I$$

הערה: כל מטריצה $C(x)$, כאשר x מופיע בחזקות, ניתנת להצגה:

$$C(x) = C_n \cdot x^n + C_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + C_1 \cdot x + C_0$$

כאשר C_i מטריצה שלא מכילה את x.

דוגמה

$$C(x) = \begin{pmatrix} x^3 + 2 \cdot x & x^2 + 1 \\ x^3 + x^2 & x - 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C(x) = C_3 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_0$$

הוכחה

בשיוון $M\cdot adj(M)=\det(M)\cdot I$, נציב $M=x\cdot I-A$. נקבל:

$$(x\cdot I-A)\cdot adj(x\cdot I-A)=\det(x\cdot I-A)\cdot I$$

$$(x\cdot I-A)\cdot adj(x\cdot I-A)=p_A(x)\cdot I$$

נציג את המטריצה הפולינומיאלית $adj(x\cdot I-A)$ בצורה:

$$adj(x\cdot I-A)=B_{n-1}\cdot x^{n-1}+B_{n-2}\cdot x^{n-2}+\cdots+B_1\cdot x+B_0$$

נציב חזרה:

$$(x\cdot I-A)\cdot(B_{n-1}\cdot x^{n-1}+B_{n-2}\cdot x^{n-2}+\cdots+B_1\cdot x+B_0)=(x^n+\alpha_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+\alpha_1\cdot x+\alpha_0)\cdot I$$

נשווה את המקדמים בשני האגפים הנמצאים ליד אותן חזקות:

$$B_{n-1}=I\quad \backslash\times A^n$$

$$B_{n-2}-A\cdot B_{n-1}=\alpha_{n-1}\cdot I\quad \backslash\times A^{n-1}$$

$$B_{n-3}-A\cdot B_{n-2}=\alpha_{n-2}\cdot I\quad \backslash\times A^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$B_0-A\cdot B_1=\alpha_1\cdot I\quad \backslash\times A$$

$$-\mathrm{A}\cdot B_0=\alpha_0\cdot I$$

לאחר הכפל בחזקות של A משמאל, נקבל:

$$A^n\cdot B_{n-1}=A^n$$

$$A^{n-1}\cdot B_{n-2}-A^{n-2}\cdot B_{n-1}=\alpha_{n-1}\cdot A^{n-1}$$

$$A^{n-2}\cdot B_{n-3}-A^{n-1}\cdot B_{n-2}=\alpha_{n-2}\cdot A^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$A\cdot B_0-A^2\cdot B_1=\alpha_1\cdot A$$

$$-A\cdot B_0=\alpha_0\cdot I$$

נקבל: $p_A(A)=0$.

■

דוגמה

תהי $A = I_n$.

$p_A(x) = (x-1)^n$ פולינום מאפס לפי משפט קיילי המילטון.

אבל גם $f(x) = x - 1$ פולינום מאפס, שכן: $f(I) = I - 1 \cdot I = I - I = 0$.

הגדרה

תהי A_{n*n} מטריצה ריבועית. אומרים ש- $m_A(x)$ הינו **פולינום מינימלי** ל - A אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $m_A(x)$ הינו פולינום מאפס ל - A. ז״א: $m_A(A) = 0$.
2. $m_A(x)$ הפולינום מהמעלה הקטנה ביותר המקיים את 1.
3. $m_A(x)$ פולינום מתוקן. ז״א, המקדם הראשי שלו שווה ל $1-$.

דוגמה

תהי $A = I_n$.

אזי: $m_A(x) = x - 1$.

משפט

לכל מטריצה A קיים פולינום מינימלי יחיד.

הוכחה

קיום - ברור כי פולינום מינימלי קיים (קיים פולינום מאפס).

יחידות – נניח כי $m_1(x), m_2(x)$ שני פולינומים מינימליים.

נסמן: $\deg(m_2(x)) =_{\text{תכונות פולינום מאפס}} \deg(m_1(x)) = d$.

$$m_1(x) = x^d + \cdots$$

$$m_2(x) = x^d + \cdots$$

נתבונן בפולינום: $m(x) = m_1(x) - m_2(x)$.

מתקיים: $\deg(m(x)) < d$ וכן: $m(A) = m_1(A) - m_2(A) = 0 - 0 = 0$.

אחרי התיקון של $m(x)$, נקבל פולינום מתוקן ומאפס כך ש - $\deg(m(x)) < d$, לכן:

$m(x) \equiv 0$, ומתקיים: $m_1(x) = m_2(x)$

■

משפט

לכל מטריצה A, מתקיים: $m_A(x)|p_A(x)$.

הוכחה

נשתמש בחילוק עם שארית, ז"א, נתבונן בשווין: $p_A(x) = q(x)\cdot m_A(x) + r(x)$.

נציב A במקום x, ונקבל:

$$p_A(A) = q(A)\cdot m_A(A) + r(A)$$

עפ"י משפט קיילי המילטון:

$$0 = q(\mathrm{A})\cdot 0 + r(\mathrm{A})$$

$$r(A) = 0$$

ומתקיים: $\deg\big(r(x)\big) < \deg\big(m_A(x)\big)$, וזה לא ייתכן בגלל מינימליות של $m_A(x)$. לכן - $r(x) \equiv 0$, ז"א, $p_A(x) = q(x)\cdot m_A(x)$, ולכן $m_A(x)|p_A(x)$. ∎

דוגמה

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. צ"ל: למצוא פולינום מינימלי.

$$p_A(x) = (x-2)\cdot(x-3)$$

$$m_A(x) = \begin{cases} x-2 \\ x-3 \\ (x-2)\cdot(x-3)\end{cases}$$

אם: $f(x) = x-2$, אזי:

$$f(A) = A - 2\cdot I = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq 0$$

אם: $g(x) = x-3$, אזי גם: $g(A) \neq 0$.

לכן: $m_A(x) = (x-2)\cdot(x-3) = p_A(x)$.

∎

דוגמה

$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. צ"ל: למצוא פולינום מינימלי.

$$p_A(x)=(x-1)^2.$$

$$m_A(x)=\begin{cases}x-1\\(x-1)^2\end{cases}$$

אם: $f(x)=x-1$, אזי:

$$f(\mathcal{J})=\mathcal{J}-I\neq 0$$

לכן: $m_A(x)=(x-1)^2=p_A(x)$.

■