89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 11

עוצמות

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות. נסמן $|A| \le |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע מ A ל B.
נסמן $|A| < |B|$ אם $|A| \le |B|$ אך לא קיימת פונקציה על מ A ל B.

דוגמה: $|I_3| < |I_4|$,$|I_3| \le |I_4|$,
דוגמה: $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$.
הוכחה: הפונקציה $g: \mathbb{N} \to (0,1)$ המוגדרת על ידי $g(n) = \frac{1}{n+2}$ היא חח"ע (תרגיל קל), ולכן $|\mathbb{N}| \le |(0,1)|$.
נניח בשלילה שקיימת פונקציה $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ שהיא על.
אזי ניתן לסדר את אברי $(0,1)$ בשורה:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 = 0.a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots \\ f(1) &= a_1 = 0.a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ f(2) &= a_2 = 0.a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ &\vdots \\ f(n) &= a_n = 0.a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

כאשר $a_i \in (0.1)$ ו $a_{i,j} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
(שימו לב ש $0.000\dots, 0.999\dots \notin (0,1)$).

כעת נראה שקיים אבר $b \in (0,1)$ שאין לו מקור, וזו תהיה סתירה להנחה ש f על.
נגדיר $b = 0.b_0b_1b_2\dots$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_n = \begin{cases} 2, & a_{nn} = 1 \\ 1, & a_{nn} \ne 1 \end{cases}$.
מכיון ש $b_0 \ne a_{00}$ נובע ש $b \ne a_0 = f(0)$.
מכיון ש $b_1 \ne a_{11}$ נובע ש $b \ne a_1 = f(1)$.
לכל $n \in \mathbb{N}$ נקבל ש $b_n \ne a_{nn}$, ולכן $b \ne a_n = f(n)$.
נובע שלא קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $f(n) = b$, וזו סתירה להנחה ש f היא על.

נקבל ש $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$.
מסקנה: $\aleph_0 < \aleph$.

משפט קנטור: תהי A קבוצה, אזי $|A| < |P(A)|$.

משפט: קנטור-שרדר- ברנשטיין: תהיינה A,B קבוצות כלשהן.
אם $|A| \le |B|$ וגם $|B| \le |A|$ אזי $|A| = |B|$.

דוגמה: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$
הוכחה: מכיון שהפונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f(n) = (n,n)$ היא חח"ע, נובע ש $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.
נגדיר פונקציה $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בצורה הבאה $g\big((n,m)\big) = 2^n 3^m$.
מהמשפט היסודי של האריתמטיקה נובע שהפונקציה אכן חח"ע, ונקבל ש $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \le |\mathbb{N}|$.
ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע ש $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

<u>תרגיל</u>: נגדיר $S = \{R \mid \mathbb{N}$ הוא יחס שקילות על $R\}$.

א. הוכח ש $|S| \leq |P(\mathbb{N})|$.

ב. תהי $A = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ותהי $T = \{\mathcal{F} \mid \mathbb{N}$ חלוקה של $\mathcal{F}\}$.

נגדיר את הפונקציה $f: P(A) \to T$ על ידי $f(X) = \{X \cup \{0\}, (A \setminus X) \cup \{1\}\}$.

הוכח ש f חח"ע.

ג. הוכח ש $|S| = |P(\mathbb{N})|$.

<u>פיתרון</u>:

א. לפי הגדרה של יחס, עבור כל יחס שקילות R על $\mathbb{N}$ מתקיים $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, לכן $R \in P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

נובע מכך ש $S \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ולכן $|S| \leq |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$ (פונקצית ההכלה היא חח"ע).

בשבוע שעבר הוכחנו שאם $|A| = |B|$ אזי $|P(A)| = |P(B)|$.

מכיון ש $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ נובע ש $|P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |P(\mathbb{N})|$.

נקבל ש $|S| \leq |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |P(\mathbb{N})|$.

ב. תהיינה $X, Y \in P(A)$ נניח ש $f(X) = f(Y)$, כלומר $\{X \cup \{0\}, (A \setminus X) \cup \{1\}\} = \{Y \cup \{0\}, (A \setminus Y) \cup \{1\}\}$.

- <u>מקרה 1</u>: $(X \cup \{0\} = Y \cup \{0\})$ ו $\big((A \setminus X) \cup \{1\} = (A \setminus Y) \cup \{1\}\big)$.

  $X, Y \subseteq A$ לכן בפרט ש $0 \notin X, Y$, ומכיון שמתקיים $X \cup \{0\} = Y \cup \{0\}$ נובע $X = Y$.

  בנוסף, מכיון ש $1 \notin A$ ומתקיים $(A \setminus X) \cup \{1\} = (A \setminus Y) \cup \{1\}$ נובע $A \setminus X = A \setminus Y$, לכן $X = Y$.

  (כלומר התנאים לא סותרים אחד את השני)

- <u>מקרה 2</u>: $(X \cup \{0\} = (A \setminus Y) \cup \{1\})$ ו $\big((A \setminus X) \cup \{1\} = Y \cup \{0\}\big)$.

  מכיון ש $X \subseteq A$ נובע בפרט ש $1 \notin X$, ולכן $1 \notin X \cup \{0\}$ ונקבל סתירה, לכן מקרה זה לא מתקיים.

נובע מכך ש $f: P(A) \to T$ חח"ע.

ג. מכיון ש $f: P(A) \to T$ חח"ע נובע ש $|P(A)| \leq |T|$.

בנוסף $|\mathbb{N}| = |A|$, ולכן $|P(\mathbb{N})| = |P(A)|$ ונקבל ש $|P(\mathbb{N})| = |P(A)| \leq |T|$, כלומר $|P(\mathbb{N})| \leq |T|$.

בסעיף א' הוכחנו ש $|S| \leq |P(\mathbb{N})|$, ובנוסף $|P(\mathbb{N})| \leq |T|$, לכן $|S| \leq |T|$ (הרכבה של פונקציות חח"ע היא חח"ע)

כעת נראה ש $|T| \leq |S|$.

לפי משפט, לכל חלוקה $\mathcal{F}$ של קבוצה $B \neq \emptyset$ קיים יחס שקילות R על B כך ש $\mathcal{F} = B \,/\, R$.

נגדיר $g: T \to S$ על ידי $g(\mathcal{F}) = R$, כאשר R הוא יחס שקילות המקיים $\mathcal{F} = \mathbb{N} \,/\, R$.

(תרגיל: להראות ש R באמת יחיד, כלומר שעבור שני יחסי שקילות $R_1, R_2 \in S$ מתקיים $\mathbb{N}/R_1 = \mathbb{N}/R_2 \Rightarrow R_1 = R_2$)

נראה ש g חח"ע.

תהיינה $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in T$ שתי חלוקות של $\mathbb{N}$ ונניח ש $g(\mathcal{F}_1) = g(\mathcal{F}_2)$.

כלומר קיים $R \in S$ כך ש $g(\mathcal{F}_1) = R$ וגם $g(\mathcal{F}_2) = R$.

אזי $\mathcal{F}_1 = \mathbb{N} \,/\, R$ וגם $\mathcal{F}_2 = \mathbb{N} \,/\, R$, לכן $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

כלומר $|T| \leq |S|$ וגם $|S| \leq |T|$, לכן ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע $|S| = |T|$.

כעת $|P(\mathbb{N})| \leq |S|$ ומסעיף א' $|S| \leq |P(\mathbb{N})|$, לכן ממשפט קנטור-שרדר-ברנשטיין נובע ש $|S| = |P(\mathbb{N})|$.

קומבינטוריקה

<u>עקרון החיבור</u>: עבור שתי קבוצות סופיות זרות A,B מתקיים $|A \cup B| = |A| + |B|$ (החיבור הוא מעל הטבעיים).
באינדוקציה ניתן להוכיח שעבור קבוצות סופיות וזרות בזוגות $A_1, \dots, A_n$ מתקיים $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

<u>דוגמה</u>: נניח שיש 4 סוגי גלידה שונים ו 5 סוגי פיצה שונים, ומזמינים גלידה או פיצה (אך לא את שניהם),
אזי יש $4 + 5 = 9$ אפשרויות הזמנה.

<u>עקרון הכפל</u>: עבור שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (הכפל הוא מעל הטבעיים).
באינדוקציה ניתן להוכיח שעבור מספר סופי של קבוצות סופיות $A_1, \dots, A_n$ מתקיים $|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n}|A_i|$.

<u>דוגמה</u>: נניח שיש 4 סוגי גלידה שונים ו 5 סוגי פיצה שונים, ומזמינים גם גלידה וגם פיצה, אזי יש $4 \cdot 5 = 20$ אפשרויות.

<u>תרגיל</u>: כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מהספרות $\{1,2,3,4\}$?
<u>פתרון</u>: לספרת האלפים יש 4 אפשרויות, וגם לספרת המאות, העשרות והאחדות יש 4 אפשרויות.
מעקרון הכפל נקבל $4^4 = 256$ אפשרויות.

<u>תרגיל</u>: כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מהספרות $\{1,2,3,4\}$ שמופיעה בהם הספרה 3?
<u>פתרון שגוי</u>: אם נקבע את ספרת האלפים להיות 3, אז לפי עקרון הכפל יש $4^3 = 64$ אפשרויות למספרים.
אם נקבע את ספרת המאות להיות 3, יש $4^3 = 64$ אפשרויות. כנ"ל לגבי ספרת העשרות וספרת האחדות.
מעקרון החיבור נקבל $4 \cdot 64 = 256$ אפשרויות.
הפתרון שגוי מכיון שיש מספרים שבהם יותר מספרה אחת היא 3, לדוגמה 3333, והם נספרים יותר מפעם אחת.
<u>פתרון</u>: נסמן ב A את קבוצת המספרים בני 4 ספרות, וב B את קבוצת המספרים בני 4 ספרות ללא הספרה 3.
מספר האפשרויות למספרים בני 4 ספרות שניתן להרכיב מהספרות $\{1,2,4\}$ הוא $|B| = 3^4 = 81$
אזי קבוצת המספרים בני 4 ספרות שבהם מופיעה הספרה 3 היא $A \setminus B$.
כעת B ו $A \setminus B$ קבוצות זרות, לכן לפי עקרון החיבור $|A| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B|$.
כלומר $|A \setminus B| = |A| - |B| = 256 - 81 = 175$.

<u>תרגיל</u>: בכמה אופנים ניתן להניח שני צריחים מאותו צבע על לוח שחמט כך שלא יהיו על אותה שורה ועל אותו טור?
<u>פתרון</u>: את הצריח הראשון ניתן למקם בכל אחת מ 64 המשבצות.
לכל משבצת יש 7 משבצות נוספות באותה שורה ו 7 משבצות נוספות באותו טור, לכן מספר האפשרויות למקם את הצריח השני הוא $64 - 15 = 49$.
מעיקרון הכפל נקבל $64 \cdot 49$ אפשרויות, אך מכיון שלצריחים יש אותו צבע, כל אפשרות נספרת פעמיים.
לכן נקבל $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 49 = 32 \cdot 49 = 1568$.

<u>עקרון שובך היונים</u>: תהיינה A,B קבוצות סופיות. אם $|A| > |B|$ אזי אין פונקציה חח"ע $f: A \to B$.
כלומר אם יש $n + 1$ יונים ו n שובכים, אזי בהכרח קיים לפחות שובך אחד שמכיל לפחות שתי יונים.

<u>תרגיל</u>: הוכח שבכל קבוצה של 6 מספרים שלמים יש 2 מספרים שהפרשם מתחלק ב 5 ללא שארית.
<u>פתרון</u>: קבוצת השאריות בחלוקה ב 5 היא $A = \{0,1,2,3,4\}$. תהי $B \subseteq \mathbb{Z}$ קבוצה בת 6 מספרים שלמים.
לפי עקרון שובך היונים, כל פונקציה מ $f: B \to A$ אינה חח"ע, בפרט הפונקציה $f(b) = b(mod\ 5)$.
כלומר קיימים שני אברים $b_1, b_2 \in B$ עבורם מתקיים $b_1 \equiv b_2(mod\ 5)$.
לכן $b_1 - b_2 \equiv 0(mod\ 5)$, כלומר $b_1 - b_2$ מתחלק ב 5 ללא שארית.

<u>תרגיל</u>: הוכח שקיים מספר שמתחלק ב 359 שספרותיו הן 0 או 7.
<u>פתרון</u>: קבוצת השאריות בחלוקה ב 359 היא.$A = \{0,1, \dots ,358\}$, כלומר $|A| = 359$.
נסתכל על הקבוצה $B = \{b_1, \dots , b_{360}\}$ כאשר $b_1 = 7, b_2 = 77, b_3 = 777, \dots$
לפי עקרון שובך היונים כל פונקציה $f: B \to A$ אינה חח"ע, בפרט הפונקציה $f(b) = b\big(mod\ 359\big)$.
כלומר קיימים שני אברים $b_i, b_j \in B$ שיש להם אותה שארית בחלוקה ב 359, $b_i \equiv b_j (mod\ 359)$.
לכן $b_i - b_j \equiv 0 (mod\ 359)$, כלומר $b_i - b_j$ הוא מספר שמתחלק ב 359 ללא שארית, וספרותיו הן 0 או 7.

<u>בעיות מניה</u>

בסעיף זה נסתכל על בעיות מהסוג של בחירת k אברים מקבוצה סופית בגודל n.
יש שני וריאנטים שמגדירים את השאלה:
1) האם יש חשיבות לסדר הבחירה
2) האם מותר לבחור כל אבר פעם אחת או יותר

<u>בחירה עם חזרות ועם חשיבות לסדר</u>

בחירת k אברים מתוך n אברים עם חזרות ועם חשיבות לסדר למעשה מגדירה סדרה מאורך k.
לכל אחד מהאינדקסים $\{1, \dots , k\}$ צריך לבחור מתוך קבוצה A שעוצמתה n אבר $a_i \in A$.
כל סידרה כזו $(a_1, \dots , a_k)$ מגדירה פונקציה $f: \{1, \dots , k\} \to A$ על ידי $f(i) = a_i$.
מספר הפונקציות שניתן להגדיר הוא הוא n^k.

<u>משפט</u>: תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $k \in \mathbb{N}$.
מספר האפשרויות לבחור k אברים מ A עם חזרות ועם חשיבות לסדר הוא n^k.

<u>מסקנה</u>: תהיינה A, B קבוצות סופיות, מספר הפונקציות מ A ל B הוא $|B|^{|A|}$.

<u>תרגיל</u>: בטופס טוטו צריך למלא 16 ניחושים, כאשר לכל ניחוש יש 3 אפשרויות $(1,2,X)$.
כמה אפשרויות יש למלא טופס טוטו?
<u>פתרון</u>: כל אפשרות מילוי מגדירה פונקציה $f: \{1, \dots , 16\} \to \{1,2,X\}$, כלומר $k = 16$ ו $n = |A| = 3$.
לכן מספר האפשרויות הוא $n^k = 3^{16} = 43{,}046{,}721$.

<u>בחירה ללא חזרות ועם חשיבות לסדר</u>

בחירת k אברים מתוך n אברים ללא חזרות ועם חשיבות לסדר למעשה מגדירה סדרה מאורך k שבה כל אבר מופיע לכל היותר פעם אחת, כלומר פונקציה חח"ע $f: \{1, \dots , k\} \to A$.

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה סופית. פרמוטציה (תמורה) על A היא פונקציה חח"ע ועל $\pi: A \to A$.

<u>משפט</u>: מספר הפרמוטציות על קבוצה A מעוצמה n הוא $n!$.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n.

<u>משפט</u>: תהי A קבוצה, $|A| = n$, ויהי $0 \le k \le n$. מספר האפשרויות לבחור k אברים מ A ללא חזרות ועם חשיבות לסדר הוא $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

<u>תרגיל</u>: כמה אפשרויות יש לסיסמה בת 6 תוים, המורכבת מאותיות אנגליות (קטנות), כאשר כל אות יכולה להופיע לכל היותר פעם אחת?
<u>פתרון</u>: כל ססמה מגדירה פונקציה חח"ע $f: \{1,2,3,4,5,6\} \to \{a, b, \dots , z\}$, כלומר $k = 6$ ו $n = |A| = 26$.
לכן מספר האפשרויות הוא $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 165{,}765{,}600 = \frac{26!}{20!} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

הערה: על מנת לסדור n אברים בשורה, צריך לבחור n מתוך n ללא חזרות ועם חשיבות לסדר, לכן יש $n!$ אפשרויות.

תרגיל: בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר n אנשים בשורה כך שאריק, בנץ וכרובי יעמדו בסמיכות אחד לשני?

פתרון: נחשוב על אריק, בנץ וכרובי כעל אדם אחד, ונסדר בשורה את $n-3$ האנשים הנותרים ואת השלשה. מספר האפשרויות לכך הוא $(n-3+1)! = (n-2)!$.

בכל אפשרות כזו יש $3!$ אפשרויות לסדר את השלשה, לכן התשובה היא $3! \cdot (n-2)!$.

הערה: סידור במעגל דומה לסידור בשורה, אך סיבוב של המעגל שלא משנה את הסידור לא נחשב כסידור נוסף.

יש $n!$ אפשרויות סידור ל n אנשים ו n סיבובים למעגל לכן יש $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ אפשרויות סידור ל n אנשים במעגל.

ניתן לחשוב בצורה נוספת על סידור אנשים במעגל, כאשר קובעים מישהו בתור ראש השולחן.

כעת צריך לסדר $n-1$ אנשים בשורה ביחס אליו, לכן יש $(n-1)!$ אפשרויות.

תרגיל: בכמה אפשרויות שונות ניתן לסדר n אנשים במעגל כך שאריק, בנץ וכרובי יעמדו בסמיכות?

פתרון: נחשוב על אריק, בנץ וכרובי כעל אדם אחד, ונסדר במעגל את $\mathrm{n}-3$ האנשים הנותרים ואת השלשה.

מספר האפשרויות לסדר $n-2$ אברים במעגל הוא $(\mathrm{n}-3)!$.

בכל אפשרות כזו יש $3!$ אפשרויות לסדר את השלשה בשורה, לכן התשובה היא $3! \cdot (\mathrm{n}-3)!$.

אבל שימו לב שפתרון זה נכון עבור $\mathrm{n} > 3$.

אם $\mathrm{n} = 3$, צריך לסדר את השלשה במעגל, ובמקרה זה יש $2! = 2$ אפשרויות.