תרגיל 7 לינארית למורים באר שבע תש"ף

17 ביוני 2020

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם v שייך ל-W.

(א) $v = (1,2,3)\,,\, W = sp\left\{(4,5,6)\,,(7,8,9)\right\}$.

פתרון: נבדוק האם קיימים סקלרים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 + 7\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + 8\alpha_2 \\ 6\alpha_1 + 9\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

שזוהי מערכת משוואות

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 7\alpha_2 & = 1 \\ 5\alpha_1 + 8\alpha_2 & = 2 \\ 6\alpha_1 + 9\alpha_2 & = 3 \end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת

את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - \frac{6}{4}R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 8-\frac{35}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 9-\frac{21}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וקיבלנו מערכת מדורגת, ללא שורת סתירה ולכן $v \in W$.

(ב) $v = x^2 - x,\ W = sp\left\{x^2+x+1, x^2-x+1, 6\right\}$.

פתרון: נבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1\left(1+x+x^2\right) + \alpha_2\left(1-x+x^2\right) + \alpha_3(6) = -x+x^2$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$(\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3) + (\alpha_1-\alpha_2)x + (\alpha_1+\alpha_2)x^2 = -x+x^2$$

ומהשוואת מקדמים נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3 & =0 \\ \alpha_1-\alpha_2 & =-1 \\ \alpha_1+\alpha_2 & =1 \end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

וקיבלנו מערכת מדורגת, ללא שורת סתירה ולכן $v \in W$.

(ג) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ W = sp\left\{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1\left(\begin{array}{cc}2&2\\2&2\end{array}\right)+\alpha_2\left(\begin{array}{cc}1&2\\2&2\end{array}\right)+\alpha_3\left(\begin{array}{cc}6&6\\6&6\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\left(\begin{array}{cc}2\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3&2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3\\2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3&2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\end{array}\right)$$

ומהשוואת רכיבי המטריצה נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3 & =1\\2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3 & =0\\2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3 & =0\\2\alpha_1+2\alpha_2+6\alpha_3 & =1\end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&6&1\\2&2&6&0\\2&2&6&0\\2&2&6&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&6&1\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\\2&2&6&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&6&1\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\\0&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&6&1\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה ולכן $v\notin W$.

2. מצאו לאלו ערכי k מתקיים: $(1,2,k)\in sp\left\{(k,1,1),(0,1,-1)\right\}$.

פתרון: נבדוק לאילו ערכי k קיימים סקלרים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\begin{pmatrix}k\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1-\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$$

שזוהי מערכת משוואות

$$\begin{cases}k\alpha_1 & =1\\\alpha_1+\alpha_2 & =2\\\alpha_1-\alpha_2 & =k\end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{cc|c}k & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & -1 & k\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\k & 0 & 1\\1 & -1 & k\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-R_1]{R_2\leftarrow R_2-kR_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\0 & -k & 1-2k\\0 & -2 & k-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\0 & -2 & k-2\\0 & -k & 1-2k\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{1}{2}kR_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\0 & -2 & k-2\\0 & 0 & 1-k-\frac{1}{2}k^2\end{array}\right)$$

ואז למערכת אין שורת סתירה אמ"מ $1-k-\frac{1}{2}k^2=0$ שזה קורה עבור $k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{-1}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}{-1}$ ואלו המקרים היחידים בהם $(1,2,k)\in sp\left\{(k,1,1),(0,1,-1)\right\}$.

3. הציגו את המרחבים הבאים כאוסף פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות הומוגנית.

(א) $sp\left\{(4,5,6),(7,8,9)\right\}$.

פתרון: ניקח איבר כללי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ואז $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$

אמ"מ קיימים סקלרים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_1 + 7\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + 8\alpha_2 \\ 6\alpha_1 + 9\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

שזוהי מערכת משוואות

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 7\alpha_2 & = x \\ 5\alpha_1 + 8\alpha_2 & = y \\ 6\alpha_1 + 9\alpha_2 & = z \end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & x \\ 5 & 8 & y \\ 6 & 9 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - \frac{6}{4}R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - \frac{5}{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & x \\ 0 & 8 - \frac{35}{4} & y - \frac{5}{4}x \\ 0 & 9 - \frac{21}{2} & z - \frac{6}{4}x \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & x \\ 0 & -\frac{3}{4} & y - \frac{5}{4}x \\ 0 & -\frac{3}{2} & z - \frac{3}{2}x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & x \\ 0 & -\frac{3}{4} & y - \frac{5}{4}x \\ 0 & 0 & z + x - 2y \end{array}\right)$$

ולכן אין שורת סתירה אמ"מ $z + x - 2y = 0$ ולכן

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\right\}$$

כנדרש.

(ב) $.sp\left\{(2,1,1,5),(0,0,1,-1)\right\}$

פתרון: ניקח איבר כללי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ואז $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

אמ"מ קיימים סקלרים α_1, α_2 כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ 5\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

שזוהי מערכת משוואות

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & = x_1 \\ \alpha_1 & = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = x_3 \\ 5\alpha_1 - \alpha_2 & = x_4 \end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת

את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 5 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 5 & -1 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 \\ 5 & -1 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 5R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 \\ 0 & -1 & x_4 - 5x_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & x_4 - 5x_2 \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & x_4 - 5x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_4 - 5x_2 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 \end{array}\right)$$

ולכן אין שורת סתירה אמ"מ $x_3 - x_2 + x_4 - 5x_2 = 0$ וגם $x_1 - 2x_2 = 0$ ולכן

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} -6x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

כנדרש.

(ג) $sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון: ניקח איבר כללי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ואז $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \right\}$

אמ"מ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

וניתן לסדר את אגף שמאל ולקבל

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 & 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 & 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

שזוהי מערכת משוואות

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 & = a \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 & = b \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 & = c \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 & = d \end{cases}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שלמערכת זאת יש פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & a \\ 2 & 2 & 6 & b \\ 2 & 2 & 6 & c \\ 2 & 2 & 6 & d \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 2 & 2 & 6 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & d-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

ולכן אין שורת סתירה אמ"מ $c - b = 0$ וגם $d - b = 0$ ולכן

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \begin{array}{c} c-b=0 \\ d-b=0 \end{array} \right\}$$

כנדרש.

4. תהיינה A,B קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם $A\subseteq B$ אז $sp\left(A\right)\subseteq sp\left(B\right)$.

פתרון: הוכחה: נניח $A\subseteq B$. כיוון ש $B\subseteq \text{span}B$ נקבל כי $A\subseteq \text{span}B$ (ו $\text{span}B$ הוא תת מרחב) ולכן $\text{span}A\subseteq \text{span}B$

(ב) אם $sp\left(A\right)\subseteq sp\left(B\right)$ אז $A\subseteq B$.

פתרון: הפרכה: נניח $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\},A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$. כיוון ש $A\subseteq \text{span}B$ (שהרי $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in \text{span}B$) נקבל $\text{span}A\subseteq \text{span}B$. אבל כמובן ש A אינה מוכלת ב B.

(ג) $sp\left(A\cap B\right)=sp\left(A\right)\cap sp\left(B\right)$.

פתרון: הפרכה: נניח $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\},A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$. כיוון ש $A\subseteq \text{span}B$ (שהרי $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in \text{span}B$) נקבל $\text{span}A\subseteq \text{span}B$. ומכיוון ש $B\subseteq \text{span}A$ (שהרי $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\in \text{span}A$) נקבל $\text{span}B\subseteq \text{span}A$. ולכן בסה"כ קיבלנו ש

$$\text{span}A=\text{span}B$$

ולכן

$$\text{span}A\cap \text{span}B=\text{span}A=\text{span}B$$

ומצד שני $A\cap B=\emptyset$ ולכן

$$\text{span}\left(A\cap B\right)=\text{span}\emptyset=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\neq \text{span}A\cap \text{span}B$$