הרצאה 7

למה .B.-W

$$\forall\{x^k\}_{k=1}^{\infty}, \left\|x^k\right\|_2 \Rightarrow \exists\{x^{k_i}\}_{i=1}^{\infty} : x^{k_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x^o, \left\|x^{k_i}-x_o\right\|_2 \to 0$$

גזירות

$$a \in \overset{o}{\Omega}$$

$f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאל בa אם $\exists L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש:

$$\left\|h\right\| < \delta : f(a+h)-f(a) = L(h)+\epsilon(h)\left\|h\right\|$$
$$\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$$

$$L \coloneqq df_a$$

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o\left(\left\|h\right\|\right)_{h\to 0}$$

משפט

אם f דיפ' בa אזי f רציפה שם.

$$a+h=x$$

$$f(x)=f(a)+df_a(x-a)+o\left(\left\|x-a\right\|\right)_{x\to a}$$

$$x\to a \Rightarrow f(x)\to f(a)$$

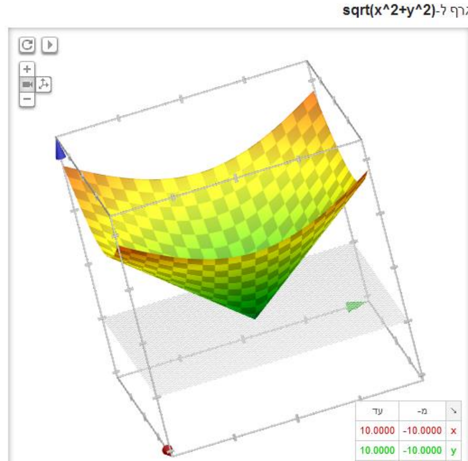
ולכן רציף.

דוגמא

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, a=(0,0)$

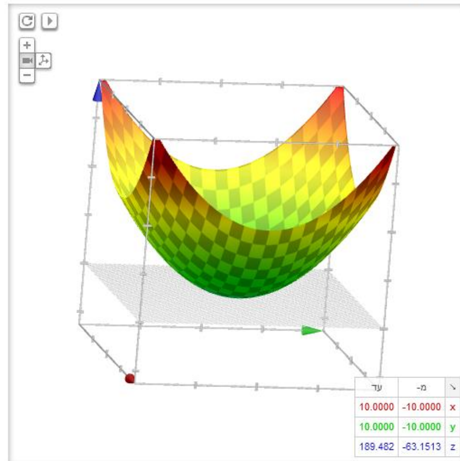
לא דיפ'.

גרף ל-sqrt(x^2+y^2)



2) $f(x,y) = x^2 + y^2$

גרף ל- x^2+y^2



$$L \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(a+h) \stackrel{?}{=} f(a) + D + \epsilon(h)\|h\|$$

$$h = (h_1, h_2) \Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \epsilon(h)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\epsilon(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to 0]{} 0$$

כן דיפ'.

נגזרת חלקית

הגדרה

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$$

נקבע $1 \le i \le n$, קיימת נגזרת חלקית של f בנקודה a לפי x_j אם קיים הגבול

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$$e_j = (0,0,\dots,1,\dots,0)$$

סימונים

$$n = 1 : f', \frac{df}{dx}$$

$$n = 2 : \frac{\partial f}{\partial x_j}, D_j f,\ f'_{x_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{a}) = \lim \frac{f(a_1,\dots,a_j + t,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t}$$

כלומר

$$\varphi(u) \coloneqq f\left(a_1, \dots, a_{j-1}, u, \dots, a_n\right)$$
$$\varphi\left(a_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

נגדיר

$$\Psi(t) \coloneqq f\left(a + te_j\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} = \Psi'(0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{d}{dt} f\left(a + te_j\right)|_{t=0}$$

דוגמא

$$f(x, y) = \arctan\left(\ln x\, e^{\sin(x^2 + y^2)}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2013) = 0$$

מספיק להציב $x = 1$ בשביל למצוא את הנגזרת.

יחס בין דפר' לבין נגזרת חלקית

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a)\right)$$

משפט

$$f:\Omega \to \mathbb{R}^m, a \in \overset{o}{\Omega}$$

נניח ש f דפ' בנקודה a, אזי לכל $1 \le j \le n$ קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$

הוכחה

$$L \coloneqq df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)\|h\|$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$f(a+te_j) - f(a) = L(te_j) + \epsilon(te_j)|t|\,\|e_j\|$$

$$L(te_j) = tL(e_j), \|e_j\| = 1$$

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j) + \underbrace{\frac{|t|}{t}\epsilon(te_j)}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j)$$

משפט

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : df_a(h) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

הוכחה

$$h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$$

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{j=1}^{n} h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} h_j df_a(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$L = df_a(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,h_j$$

$$L(h) = \big(L_1(h), \dots, L_m(h)\big)$$

$$\forall 1 \le j \le n : L_j(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a) h_j$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n(h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של האופרטור $L = df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df_a \sim \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

מטריצה של Jacobi

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h$$

דוגמא

$$f(x, y, z) = (\sin xy, x^2 + y^2 + z), f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$df(1,2) = ?$$

$$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cos xy & x \cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix}_{\substack{|x=1 \\ |y=2}} = \begin{pmatrix} 2\cos 1 & \cos 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

גרדיאנט של f בנק' a

$$grad\, f(a) = \nabla f(a) \coloneqq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

דוגמא

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

גזירה בנקודה $a=(0,0)$?

1) רציפה ב-a : $|f(x,y)|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0=f(0,0)$

2) $\exists\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)$?

$$f(x,0)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{df}{dx}(x,0)|_{x=0}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{df}{dy}(0,y)|_{y=0}=0$$

3) גזירות?

$$L=df_a(h)=\sum_{j=1}^{n}\frac{df}{dx_j}(a)h_j$$

אם df_a קיים אז $df_a\equiv 0$.

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0+0+\epsilon(h)\left||h|\right|_{h\to 0}$$
$$\epsilon(h)=\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\underbrace{\nrightarrow}_{\text{גבול לא קיים הוכח לפני}}0$$

ולכן לא גזיר ב-a.

דוגמא

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\sqrt{|xy|}=0+\epsilon(xy)\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$
$$\epsilon(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$x\neq 0:\epsilon(x,x)=\frac{|x|}{\sqrt{2}|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\nrightarrow 0$$