

שאלה 1.

הוכיחו כי הסדרה $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ מתכנסת ומיצאו את גבולה.
רמז: ראשית הגדירו אותה ע"י נוסחת נסיגה ואז הראו כי היא מונוטונית וחסומה מלעיל.

שאלה 2. תהי (a_n) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$ ונתון כי $a_1 > 1$.

א. הוכיחו כי (a_n) מונוטונית עולה.

ב. חשבו את גבול הסדרה (a_n) .

שאלה 3.

- א. תהי (a_n) סדרה חסומה. הוכיחו כי קבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה היא חסומה.
רמז: השתמשו במשפט מההרצאה שאומר שאם $a_n \leq b_n$ לכל n והסדרות מתכנסות אז $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$.
ב. תנו דוגמא לסדרות מתכנסות המקיימות $a_n < b_n$ לכל n שלא מקיימות $\lim(a_n) < \lim(b_n)$.
ג. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה חסומה.
ד. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה איננה חסומה.

שאלה 4.

מיצאו את כל הגבולות החלקיים ואת הגבול העליון והתחתון של הסדרה $a_n = (-1)^n \left(5 - \frac{4}{2^n}\right)$

שאלה 5.

מיצאו את כל הגבולות החלקיים ואת הגבול העליון והתחתון של הסדרה $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

שאלה 6. מיצאו את הגבול העליון והתחתון של הסדרות הבאות:

א. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

ב. $a_n = \frac{2n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{16n+14}$

שאלה 7. תהי (a_n) סדרה. הוכיחו כי $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$.