תרגיל 2 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

(א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5} \mid n\in\mathbb{N}\} \to \mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y)=|x-y|$)

קיים. למשל נגדיר פונקציה לפי

$$f(x)=\sqrt{3}-x+2016$$

ואז אכן

$$f(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5})=\frac{n}{2n+5}+2016\in\mathbb{Q}\cap(2016,\infty)$$

בנוסף זה שיכון איזומטרי מפני ש

$$\begin{aligned}|f(\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5})-f(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5})| &= |\frac{n}{2n+5}+2016-(\frac{m}{2m+5}+2016)| \\ &= |\frac{n}{2n+5}-\frac{m}{2m+5}| \\ &= |\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}-(\sqrt{3}-\frac{m}{2m+5})|\end{aligned}$$

(ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$

לא קיים. נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי f.

$$d_5(5,0)=\frac{1}{5}$$

ולכן

$$d_5(f(5),f(0))=\frac{1}{5}$$

אבל ב $(\mathbb{Z},d_7)$ אין אף זוג נקודות שהמרחק ביניהם הוא $\frac{1}{5}$ (מרחקים הם 0 או $\frac{1}{7^k}$). סתירה.

2. יהי (X,d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

נוכיח כי המשלים קבוצה פתוחה. יהי $y\neq x$ צריך להוכיח שיש $r>0$ כך ש $x\notin B(y,r)$. אז אפשר לקחת $r=\frac{d(x,y)}{2}$.

(ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

אפשר לקחת פשוט את הפסאודו מטריקה $d(a,b)=0$ לכל $a,b\in X$ ואז x יהיה מוכל בכל כדור פתוח ולכן בכל קבוצה פתוחה. ולכן המשלים של $\{x\}$ היא לא קבוצה פתוחה (הערה: במרחב הזה הקבוצות הסגורות/הפתוחות היחידות הן $\emptyset, X$)

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.
מיידי כי כל נקודה היא קבוצה סגורה ואיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות היא גם קבוצה סגורה.

3. נביט על המרחב $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ של המספרים האי רציונלים עם המטריקה הסטנדרטית של $\mathbb{R}$. הראו כי הוא לא קשיר (למשל, הסתכלו על קבוצת האי רציונליים החיוביים, האם היא פתוחה? האם היא סגורה?).
נסמן ב A את קבוצת האי רציונליים החיוביים. משלימתה היא קבוצת האי רציונליים השליליים (0 הרי רציונלי). אם נראה כי שתי קבוצות אלה הן פתוחות אז נובע מייד שהמרחב לא קשיר. אבל הן באמת פתוחות משום ש $(0,\infty)$ קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$ ולכן $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(0,\infty)$ פתוחה ב $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. באופן דומה קבוצת השליליים פתוחה כי $(-\infty,0)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$.
הערה: למעשה המרחב הזה לא סתם לא קשיר, אלא בלתי קשיר לחלוטין. כלומר, לכל שתי נקודות $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אפשר למצוא קבוצה פתוחה וסגורה A כך ש $x\in A$ ו $y\notin A$. המרחב $(0,1)\cup(2,3)$ הוא לא קשיר אבל לא בלתי קשיר לחלוטין.

4. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה ותת חבורה.
ברור שזו קבוצה פתוחה (כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה). נוכיח שזו גם קבוצה סגורה. אם $r\geq 1$ אז הכדור הזה הוא כל $\mathbb{Z}$ וזו בוודאי קבוצה סגורה ותת חבורה. אחרת קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש

$$\frac{1}{p^{m+1}}\leq r<\frac{1}{p^m}$$

נבחר t כך ש

$$r<t<\frac{1}{p^m}$$

ואז קל לבדוק ש

$$B(0,r)=B[0,t]$$

(כי אין 2 נקודות שהמרחק שלהן ממש בין $\frac{1}{p^m}$ ו $\frac{1}{p^{m+1}}$ - אם המרחק של x מ 0 קטן שווה t הוא יהיה קטן שווה $\frac{1}{p^{m+1}}$ ולכן קטן מ r) ולכן $B(0,r)$ גם קבוצה סגורה כי זה גם כדור סגור.

נותר להוכיח שזו תת חבורה. אבל אם $x,y\in B(0,r)$ זה אומר ש

$$\frac{1}{p^{k(0,x)}}<r,\quad \frac{1}{p^{k(0,y)}}<r$$

כאשר כזכור $k(a,b)$ היא החזקה הגבוה ביותר α שעבורה $p^\alpha\mid a-b$. עכשיו נשים לב ש

$$k(0,x+y)\geq\min\{k(0,x),k(0,y)\}$$

כי אם x | p^α ו y | p^α אז $x+y$ | p^α ולכן

$$\frac{1}{p^{k(0,x+y)}} < r$$

כלומר

$$x+y \in B(0,r)$$

כנדרש.

5. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n, b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.
נשים לב שקבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ היא הכדור הפתוח שמרכזו ב $0,1,2,0,0,0,0,\ldots$ ורדיוסו $\frac{1}{3}$ כי ההבדל בין הסדרות יכול להתחיל באיבר הרביעי ולכן המרחק הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$.
בדומה הסדרות שמתחילות ב $3,4,5,6$זה כדור פתוח עם רדיוס $\frac{1}{4}$. איחודן הוא עדיין פתוח.
הערה: למעשה קל לבדוק שזוהי קבוצה סגוחה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.
נוכיח שמשילמתה פתוחה. תהי a_n סדרה לא קבועה. כלומר קיימים $a_i \neq a_j$. בלי הגבלת כלליות $i<j$. אז קבוצת כל הסדרות שמתחילות ב

$$a_1, \ldots, a_j$$

היא כדור פתוח (כמו בסעיף הקודם). וכדור זה כמובן לא מכיל אף סדרה קבוצה. זה מה שרצינו.

6. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז $(\mathbb{R}, d_f)$ הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x,y) = |f(x)-f(y)|$
הוכחה:

$\{x_n\}$ סדרת קושי אמ"ם $\forall\epsilon\exists N : \forall n,m>N, d(x_n,x_m) = |f(x_m)-f(x_n)| \to 0$

כלומר, הסדרה $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי במטריקה הרגילה של $\mathbb{R}$. לכן יש לה גבול. $f(x_n)\to a$. מכיוון שf חח"ע ועל יש לa מקור יחיד x. נקבל ש: $d(x_n,x) = |f(x_n)-a| \to 0$ ולכן $x_n \to x$. כלומר, הסדרה מתכנסת.

7. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.
הפרכה:
נסתכל על הסדרה: $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0.0.0.0...)$
(שימו לב, זוהי סדרה של סדרות. לכל n מקבלים איבר אחר בסדרה, שהוא בפני עצמו סדרה מתאפסת לבסוף)

נטען שמרחב כל הסדרות החסומות, הסדרה הזאת מתכנסת לאיבר: $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$

כלומר, x שווה לסדרה הממשית $(\frac{1}{i})$

הוכחת הטענה: $d(x_n, x) = \frac{1}{n+1} \to 0$

קיבלנו שהסדרה הנ"ל מתכנסת במרחב יותר גדול, ולכן היא סדרת קושי, אבל היא לא מתכנסת במרחב שלנו, כי הגבול שלה לא שייך למרחב (הוא לא מתאפס לבסוף).

כלומר, מצאנו סדרת קושי לא מתכנסת.

(ב) $\mathbb{R}^N$ עם המטריקה: $d((x_1, ..., x_N), (y_1, ..., y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$

הוכחה: תהא $\{x^n\}$סדרת קושי. יהא $0 < \epsilon$ נתון. בגלל שזוהי סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \geq n_0 : d_{\max}(x^n, x^m) \leq \epsilon$$

ולכן בכל קורדינאטה i מתקיים

$$\forall n, m \geq n_0 : \ |x_i^n - x_i^m| \leq \max_k |x_k^n - x_k^m| = d_{\max}(x^n, x^m) \leq$$

ולכן בכל קורינאטה נקבל סדרת קושי$\{x_i^n\}_n$ ב $\mathbb{R}$ ולכן קיים הגבול $\lim_n x_i^n = a_i$. נגדיר $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ ונראה שזה הגבול של הסדרה שלנו. לכל i קיים $n_{0,i}$ כך ש

$$\forall n \geq n_i : \ |x_i^n - a_i| \leq \epsilon$$

ולכן עבור $N_0 = \max_i \{n_i\}$ נקבל כי

$$\forall n \geq N_0 : \ d_{\max}(x^n, a) = \max_k |x_k^n - a_k| \leq \epsilon$$

וקיבלנו כי $x^n \xrightarrow{d_{\max}} a$