תרגיל 8

להגשה עד 23.12.15

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח.
נסמן: $L^p(\mu)=L^p(X,\mathbb{A},\mu)$ ו: $l^p=l^p(\mathbb{N})$.

שאלה 1

נניח X מרחב טופולוגי, ו־ $\mathbb{B}(X)\subseteq\mathbb{A}$, ולכל V פתוחה לא ריקה מתקיים $\mu(V)>0$.
הוכיחו כי אם $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ רציפות כך ש $f=g$ כב"מ־μ אז $f(x)=g(x)$ לכל $x\in X$,
והסיקו מכך כי לכל $f\colon X\to\mathbb{R}$ רציפה מתקיים:

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|\mid x\in X\}.$$

שאלה 2

1. נניח כי $\mu(X)<\infty$. הוכיחו כי אם $1\le r<p<\infty$ אזי $L^p(\mu)\subseteq L^r(\mu)$ ולכל $f\in L^p(\mu)$ מתקיים:

$$\|f\|_r\le\mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

2. הוכיחו כי אם $r<p$ אזי $l^r\subsetneqq l^p$.

שאלה 3

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f.
נניח שעבור $p\in[1,\infty)$ קיימת $g\in L^p(\mu)$ כך שלכל n: $|f_n|\le g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n\in L^p(\mu)$,
וכן כי $f_n\to f$ ב $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$.

שאלה 4

יהיו $(X,\mathbb{A})$, $(Y,\mathbb{S})$ מרחבים מדידים. ותהי $h\colon X\to Y$ פונקציה מדידה $(\mathbb{A},\mathbb{S})$.
תהי μ מידה חיובית כלשהי על $\mathbb{A}$. נגדיר לכל $E\in\mathbb{S}$:

$$\nu(E):=\mu(h^{-1}[E]).$$

הוכיחו כי:

1. ν מהווה מידה חיובית על $\mathbb{S}$.

2. אם $f\colon Y \to [0,\infty]$ מדידה־$\mathbb{S}$, אזי $f\circ h$ מדידה־$\mathbb{A}$ ומתקיים:

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\circ h\, d\mu .$$

3. אם $f\colon Y \to \mathbb{R}$ מדידה־$\mathbb{S}$, אזי $f\circ h$ מדידה־$\mathbb{A}$ ומתקיים: $f\in L^p(\nu)$ עבור $p\in[1,\infty)$ אסם $f\circ h\in L^p(\mu)$.
4. אם $f\in L^p(\nu)$ אזי ההעתקה $f\mapsto f\circ h$ שומרת נורמה, ועבור $p=1$, העתקה זו מכבדת אינטגרציה, כלומר:

$$\int_Y f d\nu = \int_X f\circ h\, d\mu .$$

שאלה 5

תהי

$$S := \{s \mid s\colon X\to\mathbb{R} \text{ is simple (measurable), and } \mu(\{x\mid s(x)\neq 0\})<\infty\} .$$

הוכיחו כי :

1. S מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$.
2. לכל $p\in[1,\infty)$:

$$S = \{t \mid t\colon X\to\mathbb{R} \text{ is simple, and } t\in L^p(\mu)\} .$$

3. לכל $p\in[1,\infty)$, S צפופה ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

בהנאה :)