תרגיל 6

להגשה עד 9.12.15

שאלה 1

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $f\colon X\to\mathbb{R}$ פונקציה ב־$L^1(\mu)$. לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t):=\int_X f(x)\cos\left(e^t f(x)\right)d\mu(x)$$

הוכיחו כי F מוגדרת ורציפה ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 2

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $a\in(0,\infty)$, $f\colon X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה כך ש:

$$0<c:=\int_X fd\mu<\infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)d\mu=\begin{cases} c & a=1\\ \infty & 0<a<1\\ 0 & 1<a<\infty\end{cases}$$

תזכורת: אם $0\le t$ ו־ $1\le a$ אז $1+t^a\le(1+t)^a\le e^{at}$.

שאלה 3

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ־X ל־$\mathbb{R}$, כך ש: $f_n\to f$ במידה שוה מעל X.

1. הוכיחו כי $\|f\|_U:=\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty$ (כלומר: f חסומה ב־ X), וכי $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_U<\infty$.
2. הוכיחו כי אם $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, וכל f_n מדידה־$\mathbb{A}$, ו־ $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_nd\mu\to\int_X fd\mu$.
3. תנו דוגמא של ממ"ח $(X,\mathbb{A},\mu)$, כך ש: $\mu(X)=\infty$, וסדרת פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$: $(f_n)_{\mathbb{N}}$ כך ש־ $f\to f_n$ במידה שוה, אבל $\int_X f_nd\mu\not\to\int_X fd\mu$.

שאלה 4

תהי m מידת לבג מעל $\mathbb{R}$ ותהי $f\in L^1(m)$. לכל $x\in\mathbb{R}$ תהי

$$F(x):=\int_{(-\infty,x)}fdm$$

אזי F רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

בהנאה :)