פתרון תרגיל 2

שאלה 1:

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, יהי $\varepsilon > 0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

ב. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $|(-1)^n| = 1 \to 1$ אבל ל $a_n = (-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

הפרכה: $a_n = (-1) \to (-1) \neq 1$ אבל $a = 1$, $|a_n| \to |1|$

שאלה 2א':

הוכחה:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}\right| = \left|\frac{a_n - L}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}\right| \le \left|\frac{a_n - L}{\sqrt{L}}\right| = \frac{1}{\sqrt{L}}|a_n - L|$$

לכן לכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $\sqrt{L}\varepsilon > 0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \sqrt{L}\varepsilon$ ולכן מתקיים $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{L}\varepsilon = \varepsilon$

פתרון לשאלה 2 סעיף ב'

יהי q ממשי המקיים $|q| < 1$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

פתרון:

טיוטה: יהי $\epsilon > 0$, נרצה למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|q^n - 0| < \epsilon$.

נוציא log משני האגפים ונקבל: $nlog|q| < log(\epsilon)$ ולכן $n > \frac{ln\epsilon}{ln|q|}$ (כי $log|q| < 0$)
(שימו לב, כאן log זה ln)

ולכן ניקח $N = \left\lceil \frac{log(\epsilon)}{log|q|} \right\rceil + 1$.