פתרון תרגיל 1 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

3 במרץ 2016

1. נרשום לפי סכימת איינשטיין:

(א) $a^i{}_j\, b^j{}_k\, c^k{}_l = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i{}_j\, b^j{}_k\, c^k{}_l$, כלומר:

$$= a^i{}_1\, b^1{}_1\, c^1{}_l + a^i{}_1\, b^1{}_2\, c^2{}_l + a^i{}_1\, b^1{}_3\, c^3{}_l +$$

$$+ a^i{}_2\, b^2{}_1\, c^1{}_l + a^i{}_2\, b^2{}_2\, c^2{}_l + a^i{}_2\, b^2{}_3\, c^3{}_l +$$

$$+ a^i{}_3\, b^3{}_1\, c^1{}_l + a^i{}_3\, b^3{}_2\, c^2{}_l + a^i{}_3\, b^3{}_3\, c^3{}_l$$

מכיוון שהאינדקסים שנמצאים גם למעלה וגם למטה הם i, j.

(ב) $a_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} v^i v^j$, כלומר:

$$= a_{11} v^1 v^1 + a_{12} v^1 v^2 + a_{13} v^1 v^3 +$$

$$+ a_{21} v^2 v^1 + a_{22} v^2 v^2 + a_{23} v^2 v^3 +$$

$$+ a_{31} v^3 v^1 + a_{32} v^3 v^2 + a_{33} v^3 v^3$$

(ג) $\delta_{ij} a^{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a^{ij}$, ומהגדרת הדלתא של קרונקר:

$$= a^{11} + a^{22} + a^{33}$$

2. העקבה היא סכום איברי האלכסון, כידוע. לכן:

$$tr\left(AB\right)=\left(AB\right)^{i}{}_{i}=A^{i}{}_{j}B^{j}{}_{i}=B^{j}{}_{i}A_{j}^{i}=\left(BA\right)^{j}{}_{j}=tr\left(BA\right)$$

3. נראה אחד מהצדדים; הצד השני דומה.

$$\left(A\left(B+C\right)\right)^{i}{}_{j}=A^{i}{}_{k}\left(B+C\right)^{k}{}_{j}=A^{i}{}_{k}\left(B^{k}{}_{j}+C^{k}{}_{j}\right)=A^{i}{}_{k}B^{k}{}_{j}+A^{i}{}_{k}C^{k}{}_{j}=$$

$$=\left(AB\right)^{i}{}_{j}+\left(BC\right)^{i}{}_{j}=\left(AB+BC\right)^{i}{}_{j}$$

מכיוון שהמטריצות שוות איבר־איבר, הן שוות.

4. $\delta^{i}{}_{j}\delta^{j}{}_{k}\delta^{k}{}_{i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta^{i}{}_{j}\delta^{j}{}_{k}\delta^{k}{}_{i}$.

מחובר כללי בסכום לא מתאפס כאשר $i=j=k$, ואז המחובר שווה ל־1.
זה מתרחש בדיוק n פעמים (כאשר $i=j=k=l$ לכל $1\leq l\leq n$), ולכן הסכום הוא n.

5. נסמן: $C=A^{2}$. לכן:

$$-b_{1}=T_{1}=a^{i}{}_{i},T_{2}=c^{i}{}_{i}$$

כעת, $c^{i}{}_{j}=a^{i}{}_{k}a^{k}{}_{j}$. לכן:

$$b_{2}=\frac{1}{2}\left(\left(-a^{i}{}_{i}\right)^{2}-a^{i}{}_{k}a^{k}{}_{i}\right)$$

לפי משפט קיילי המילטון,

$$A^{2}+b_{1}A+b_{2}I=0$$

אם נכתוב זאת במפורש נקבל:

$$\begin{pmatrix}a^{1}{}_{k}a^{k}{}_{1} & a^{1}{}_{k}a^{k}{}_{2}\\ a^{2}{}_{k}a^{k}{}_{1} & a^{2}{}_{k}a^{k}{}_{2}\end{pmatrix}-a^{i}{}_{i}\begin{pmatrix}a^{1}{}_{1} & a^{1}{}_{2}\\ a^{2}{}_{1} & a^{2}{}_{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\left(-a^{i}{}_{i}\right)^{2}-a^{i}{}_{k}a^{k}{}_{i}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ואם נשווה איבר־איבר ל־0 נקבל:

$$a^{j}{}_{k}a^{k}{}_{j}-a^{m}{}_{m}a^{i}{}_{j}+\frac{1}{2}\left(\left(-a^{m}{}_{m}\right)^{2}-a^{m}{}_{k}a^{k}{}_{m}\right)=0$$