

תרגול 6

תרגול השלמה לבקשת התלמידים עם מרדכי (04/08/2016)

partial pivoting (כולל שחלוף רק לשורות!)

בכל שלב נביא את האיבר הגדול ביותר בערכו המוחלט להיות באלכסון. שימו לב שאנחנו מחליפים שורות רק עם איברים שנמצאים מתחת לאלכסון. השיטה של *pivoting* חלקי והמלא בא כיוון שאם איבר על האלכסון שווה 0 אלימינציה גאוס לא תעבוד! (*pivoting* נועד כדי להקטין את מספר המצב של המטריצה).

דוגמה:

נתונה המערכת -

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

נפתור בעזרת *pivoting* חלקי:

$$\xrightarrow{R_2:R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3:R_3 - \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2:R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3:R_3 - \frac{4}{7}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 3.5 & 2.5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{11}{7} \end{array} \right)$$

(נשים לב כי הכופלים הינם $m_{32} = \frac{2}{3.5} = \frac{4}{7}$, $m_{31} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

והגענו למצב של משולשית עליונה ולכן נוכל לעשות הצבה לאחור -

$$\frac{11}{7}x_3 = \frac{11}{7} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$3.5x_2 + 2.5x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 16 \Rightarrow x_1 = 2$$

ולכן -

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

תרגול 6

פירוק LU

כאשר נתונה המשוואה –

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

נרצה לפרק את A כך ש –

$$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}} * \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

היתרון המרכזי: במצב זה, אם נותנים לנו מספר מערכות שבכולן A זהה ווקטור \vec{b} שונה אז נוכל למצוא פעם אחת את הפירוק LU של A , ובעזרתו נוכל למצוא את כל הפתרונות עבור כל ה- \vec{b} השונים.

$$\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b} \\ A = LU \end{cases} \Rightarrow L \underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} (1) L\vec{y} = \vec{b} \\ (2) U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

אלגוריתם LU:

נדרג בלי *pivoting* את המטריצה A . המטריצה המתקבלת נסמן ב- U . את המטריצה L נבנה מכופלי השורה בצורה הבאה:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \vdots \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n3} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

כך ש- m_{ij} זה המקדם שאיתו איפסנו את האיבר ה- i, j :

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

תרגיל:

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

(א) פרק את A ל- LU .

(ב) מצא את A^{-1} בערת פירוק זה.

תרגול 6

פתרון:

(א) נדרג את המטריצה -

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} &\xrightarrow[m_{21}=\frac{3}{1}=3]{R_2:R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[m_{31}=\frac{2}{1}=2]{R_3:R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[m_{32}=\frac{9}{4}]{R_3:R_3-\frac{9}{4}R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}}_U \end{aligned}$$

ולכן -

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

כלל אצבע: ב - L כל האלכסון הוא 1, כלומר - $\forall_i a_{ii} = 1$.

■

(ב) נרצה למצוא את A^{-1} כך ש-

$$A * \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = I$$

נחפש את x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

נשים לב כי-

$$Ax_1 = L \underbrace{Ux_1}_{\vec{y}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגול 6

וכעת נפתור –

$$\text{נסמן } \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ ונקבל –}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = -4.75$$

כעת נמצא את \vec{x}_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4.75 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$\tilde{x}_3 = 0.7308, \tilde{x}_2 = 0.3846, \tilde{x}_1 = -1.6154$$

באותו האופן –

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.9231 \\ -0.0769 \\ -0.3462 \end{pmatrix}$$

וגם את \vec{x}_3 . והתשובה הסופית הינה –

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.6154 & 0.9231 & -0.0769 \\ 0.3846 & -0.0769 & -0.0769 \\ 0.7308 & -0.3462 & 0.1538 \end{bmatrix}$$

■

תרגול 6

פירוק PLU

מצב שבו פירוק LU אינו עובד –

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

וגם ידוע ש –

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

מצד אחד –

$$\Rightarrow l_{11} * u_{11} = 0 \Rightarrow l_{11} = 0 \text{ או } u_{11} = 0$$

מצד שני –

$$l_{11}u_{12} = 1$$

$$l_{21}u_{11} = 2$$

ולכן פירוק LU לא עובד ונצטרך לעשות *pivoting*.

פירוק PLU דומה מאוד לפירוק LU רק שאנחנו משתמשים ב- *pivoting* חלקי (החלפת שורות בלבד). במצב זה נשמור לאורך כל הדרך 3 מטריצות –

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{P}} & , & \underline{\underline{L}} & , & \underline{\underline{U}} \\ \text{מטריצת} & & \text{משולשית} & & \text{משולשית} \\ \text{פרמוטציות} & & \text{עליונה} & & \text{עליונה} \\ \text{(רק החלפת שורה)} & & & & \end{array}$$

כאשר במטריצה P בכל שורה ובכל עמודה יש את המספר "1" פעם אחת והשאר 0.

דוגמה:

נבצע פירוק PLU למטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1: R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3.25 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2: R_2 + \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3: R_3 - \frac{1}{5}R_1} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix}$$

תרגול 6

$$\xrightarrow{R_2:R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{42} = \frac{1}{10}, R_4:R_4 - \frac{1}{10}R_2} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3:R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{43} = \frac{3.75}{15} = \frac{1}{4}, R_4:R_4 - \frac{1}{4}R_3} \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ולכן נקבל ש –

$$U = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת, נשים לב כי כל החלפת שורה צריך לשמור במטריצה של הפרמוטציה אם יש יותר מהחלפת שורה אחת, צריך לשמור את כל המטריצות של הפרמוטציה ולהכפיל ביניהם בסדר הבא –

$$P = P_n * \dots * P_2 * P_1$$

ולכן –

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן –

$$P = P_3 * P_2 * P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולבסוף –

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

תרגול 6

מספר מצב (condition number) של מטריצה

בהינתן המשוואה –

$$Ax = b$$

תמונה...

כעת –

$$\begin{aligned} \frac{\text{שגיאה יחסית בפלט}}{\text{שגיאה יחסית בקלט}} &= \frac{\delta_{\bar{x}}}{\delta_{\bar{b}}} = \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}} = \frac{\|A^{-1} * \Delta b\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|\Delta b\|} \\ &= \frac{\|A^{-1} * \Delta b\|}{\|x\|} * \frac{\|b\|}{\|\Delta b\|} \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|b\|}{\|x\| * \|\Delta b\|} = \frac{\|A^{-1}\| * \|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| * \|A\| * \|x\|}{\|x\|} \\ &= \boxed{\|A^{-1}\| * \|A\| = \text{cond}(A)} \end{aligned}$$

דוגמה:

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}$$

נחשב את מספר המצב שלה בעזרת נורמת L_1 :

$$\|A\|_{L_1} = \max\{11, 111\} = 111$$

ולכן –

$$A^{-1} = \frac{1}{1} * \begin{pmatrix} 101 & -10 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_{L_1} = 111$$

ובסה"כ –

$$\text{cond}(A) = 111 * 111 = 12,321$$

והמטריצה "חולה" (ולכן בדירוג מטריצות כאלו, כלומר עם $\text{cond}(A)$ גבוה, נבצע *pivoting*).