הגדרות ומשפטים למבחן באנליזה מודרנית 1

הגדרות: המידה החיצונית של לבג, קבוצות מדידות לבג, קבוצות בורל, פונקציות מדידות ואינטגרביליות , σ-אלגברה, מידה כללית, רציפות בהחלט של פונקציות ושל מידות, מידת מכפלה, השתנות חסומה, מרחבים נורמים, מרחבי בנך, מרחבי L^p כולל L^∞ ביחס למידה כלשהי, מרחבי הלברט, מידה סינגולרית , מידה σ-סופית.

משפטים (רק לצטט ולהבין, בלי להוכיח):
משפט ההתכנסות המונוטונית, הנשלטת, והחסומה, למת פאטו, משפט הגזירה של לבג, אפיון השתנות חסומה, הכללת "המשפט היסודי של חשבון אינטגרלי," אפיון קבוצות מדידות $u\times v$, משפטי פוביני וטונלי, אי-שויונים של הולדור ומינקובסקי, משפט ההצגה של ריס (במרחב הלברט), משפט רדון-ניקודים, משפט הפירוק של לבג.

תרגילים למבחן.

1. כל קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}$ שווה לאיחוד זר בן מניה של קטעים פתוחים.

2. הגדירו את קבוצת קנטור והוכיחו שהיא לא בת מנייה ומכל מקום מידת לבג שלה אפס.

3. האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} : x\neq 0 \\ 0 : x=0\end{cases}$ בעלת השתנות חסומה ב-$[0,1]$? הצדיקו.

4. תנאי ליפשיץ $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ גורר רציפות בהחלט .

5. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות ממשיות ורציפות. הוכיחו שהקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}:\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\text{ converges}\right\}$ היא מטיפוס $F_{\sigma\delta}$.

6. הוכיחו כי $\|f\|=|f(a)|+T_a^b[f]$ היא נורמה על המרחב $BV([a,b])$.

7. יהי (X,S,μ) ממ"ח ממידה סופית, ויהיו $1\leq r<p<\infty$. הוכיחו כי $L^p(d\mu)\subseteq L^r(d\mu)$