טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 13

שאלה 1

בכיתה הראינו שכל העתקה $P \longrightarrow S^1$ היא נל-הומוטופית (P המישור הפרויקטיבי).
הכלל טענה זו ככל שתוכל, כלומר מצאו תנאים מספיקים חלשים ככל שתוכל על מרחבים X ו-Y המבטיחים שכל העתקה $X \longrightarrow Y$ היא נל-הומוטופית.

הוכחה:

ננסה, למשל, להחליש את התנאים על X.

נוכיח שאם $\pi_1(X,a)$ חבורה סופית (או מאקספוננט סופי), אז המשפט מתקיים.

תהי $f:X\longrightarrow S^1$, ונביט בכיסוי הבא:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

נראה כי יש ל-f הרמה. ההומומורפיזם היחיד $\pi_1(X)\longrightarrow\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$ הוא הטריוויאלי, כי $\pi_1(X)$ סופית (או מאקספוננט סופי). לכן תמונתו מוכלת בתמונת p_*, ולכן $\hat{f}$ קיים.

מכאן כמו במשפט הנ"ל.

שאלה 2

יהי $M\subseteq\mathbb{R}^2$ איחוד המשבצות, כלומר $M=(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}\times\mathbb{R})$.

המגדר העתקת כיסוי $p:M\longrightarrow S^1\vee S^1$ כך שתצבע כל קשת אופקית של M בכחול ותמונה משמאל לימין, וכך שתצבע כל קשת אנכית באדום ותמונה מלמטה למעלה. הראה ש- $p_*(\pi_1(M))$ היא תת-חבורת הקומוטטור של $\pi_1(S^1\vee S^1)$.

פתרון:

נסמן את הלולאה האדומה ב-$S^1\vee S^1$ x ואת הלולאה הכחולה ב-y.

בכל פעם שאנו עולים ב-M אנו עוברים על y, ובכל פעם שאנו מתקדמים שמאלה ב-M, אנו עוברים על x.

בכל לולאה סגורה ב-$\pi_1(M)$ אנו עולים ויורדים אותה כמות משבצות, וכנ"ל עבור תזוזה שמאלה וימינה.

כיון ש- $\pi_1(S^1\vee S^1)=\underset{\langle x,y\rangle}{F_2}$, נקבל שכל מילה ב- $p_*(\pi_1(M))$ היא מהצורה $x^{m_1}y^{n_1}\dots x^{m_k}y^{n_k}$ כאשר $m_1+\dots+m_k=0$ וכאשר $n_1+\dots+n_k=0$.

נניח שזה הנציג המצומצם, ז"א שכל $m_i\neq 0$ וכל $n_i\neq 0$ (ואפשר רק $m_1=0$ ו-$n_k=0$).

נוכיח באינדוקציה על k שהיא בתת-חבורת הקומוטטור.

אם $k=0$, המילה היא 1 וסיימנו.

אם $k=1$, המילה היא מהצורה $x^m y^n x^{-m} y^{-n}$, שזהו הקומוטטור של x^m עם y^n.

נניח כי הטענה נכונה עבור k כלשהו, ונסתכל על מילה $w=x^{m_1}y^{n_1}\dots x^{m_{k+1}}y^{m_{k+1}}$, כאשר $m_1+\dots+m_{k+1}=0$ וגם $n_1+\dots+n_{k+1}=0$.

אם $m_1\neq 0$, נרשום $w=\underbrace{x^{m_1}y^{n_1}x^{-m_1}y^{-n_1}}_{\text{קומוטטור}}\underbrace{y^{n_1}x^{m_1+m_2}y^{n_2}x^{m_3}\dots x^{m_{k+1}}y^{n_{k+1}}}_{w'}$

ולכן נותר להוכיח עבור w'; עברנו למקרה $m_1=0$.

אם $m_1=0$, נרשום $w=\underbrace{y^{n_1}x^{m_2}y^{-n_1}x^{-m_2}}_{\text{קומוטטור}}\underbrace{x^{m_2}y^{n_1+n_2}x^{m_3}y^{n_3}\dots x^{m_{k+1}}y^{n_{k+1}}}_{w''=\text{מילה עם } k \text{ חזקות במקום } k+1}$

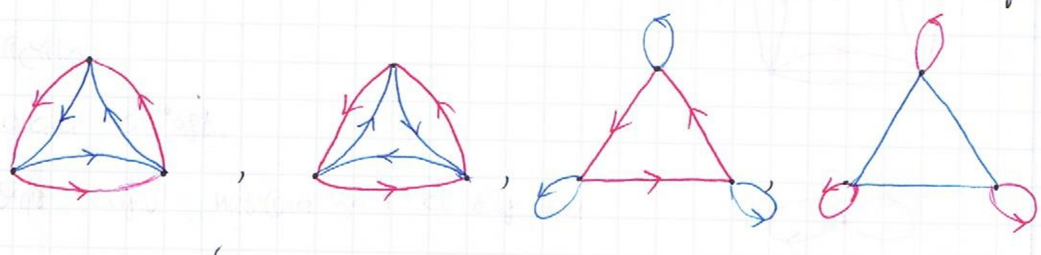
לפי הנחת האינדוקציה, w'' בתת-חבורת הקומוטטור, ולכן גם w.

שאלה 3

קבע עבור אילו מהכיסויים מסדר 3 של $S^1 \vee S^1$, אשר מצאת בשאלה 4 בתרגיל 12, חבורת האוטומורפיזמים היא טרנזיטיבית על הסיב.

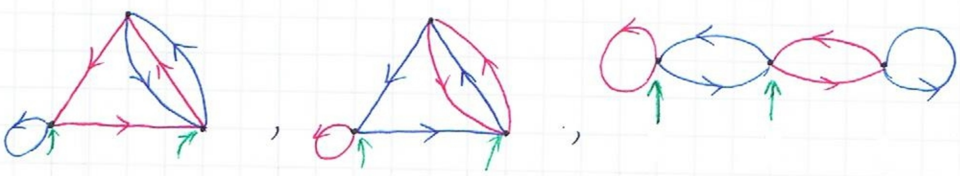
פתרון:

עבור מרחבי הכיסוי הבאים חבורת האוטומורפיזמים היא טרנזיטיבית:



(אפשר לראות זאת על ידי סיבובים ב-120° וב-240°)

עבור מרחבי הכיסוי הבאים חבורת האוטומורפיזמים אינה טרנזיטיבית:

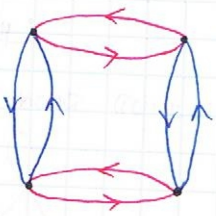


(בכל איור הנקודות המסומנות בירוק לא יוכלו להישלח אחת לשנייה)

שאלה 4

מצא מרחב כיסוי E מסדר 4 של $S^1 \vee S^1$ כך ש- $Aut(E) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

פתרון:

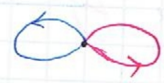


נסתכל על האיור משמאל.

האוטומורפיזמים הם:

א. הזהות.

ב. סיבוב ב- 180°.



ג. שיקוף (רק צריך לשים לב לשלוח כל צלע לצלע שתהיה באותו כיוון).

ד. הרכבה של הסיבוב ושל השיקוף.