

## תרגיל 2

1. מצאו את הפתרונות הכלליים של המשוואות הבאות:

$$y' = \frac{y}{x} \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$a(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{נסמן}$$

$$A(x) = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln x \quad \text{אזי}$$

$$y = ce^{\ln x} = ce^{\ln x} = cx \quad \text{והפתרון הוא:}$$

$$y' = (x+1)y \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$y' - (x+1)y = 0$$

$$a(x) = -x - 1 \quad \text{נסמן}$$

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} - x \quad \text{אזי}$$

$$y = ce^{\frac{x^2}{2} + x} \quad \text{והפתרון הוא:}$$

2. מצאו את הפתרונות הכלליים של המשוואות הבאות: (שימו לב, באחד התרגילים יופיע

אינטגרל שלא ניתן לבטאו באמצעות פונקציות אלמנטריות, ולכן עליכם להשאיר את

התשובה עם האינטגרל)

$$y' = \frac{y}{x} + 1 \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$y' - \frac{1}{x}y = 1$$

$$a(x) = -\frac{1}{x}, b(x) = 1 \quad \text{נסמן:}$$

$$A(x) = -\ln x \quad \text{אזי}$$

$$y = e^{\ln x} \left( \int e^{-\ln x} \cdot 1 dx + c \right) = x \left( \int \frac{1}{x} dx + c \right) = x \ln x + cx \quad \text{ונקבל:}$$

$$(ב) y' + xy - x^2 = 0$$

פתרון:

$$y' + xy = x^2$$

$$a(x) = x, b(x) = x^2 \text{ נסמן}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{2} \text{ אזי}$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx + c \right) \text{ ולכן:}$$

את האינטגרל:  $\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx$  אנחנו לא יודעים לחשב (לא ניתן לבטא אותו באמצעות פונקציות אלמנטריות), ולכן נשאיר את הפתרון כך.

$$(ג) y' + \frac{y}{x} = 6x^2$$

פתרון:

$$a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = 6x^2$$

$$A(x) = \ln x$$

$$y = e^{-\ln x} \left( \int e^{\ln x} \cdot 6x^2 dx + c \right) = \frac{1}{x} \left( \int 6x^3 dx + c \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{3}{2}x^4 + c \right) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{c}{x} \text{ לכן:}$$

3. מצאו את הפתרונות הפרטיים של המשוואות הבאות, המקיימים  $y(0) = 0$ :

$$(א) y' \cos x - y \sin x = 1 \text{ בתחום } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

פתרון:

נסדר את המשוואה:

$$y' - (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$

$$a(x) = -\tan x, b(x) = \frac{1}{\cos x}$$

לכן:  $A(x) = \ln \cos x$ . נשים לב שבתחום הנתון  $\cos x$  חיובי, ולכן לא צריך

ערך מוחלט.

$$y = e^{-\ln \cos x} \left( \int e^{\ln \cos x} \frac{1}{\cos x} dx + c \right) = \frac{1}{\cos x} \left( \int 1 dx + c \right) = \frac{x+c}{\cos x} \text{ ונקבל:}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:  $c + 0 = 0$  ולכן  $c = 0$ .

כלומר, הפתרון של בעיית ההתחלה הוא:  $y = \frac{x}{\cos x}$

$$(ב) y' - 2y = e^{3x}$$

פתרון:

$$a(x) = -2, b(x) = e^{3x}$$

$$A(x) = -2x \text{ לכן}$$

$$y = e^{2x}(\int e^{-2x} e^{3x} dx + c) = e^{2x}(\int e^x dx + c) = e^{2x}(e^x + c) = e^{3x} + ce^{2x}.$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$0 = y(0) = 1 + c$$

$$c = -1$$

והפתרון הפרטי הוא:  $y = e^{3x} - e^{2x}$

4. חומר כימי מסוים מיוצר בקצב קבוע, אך מתפרק בקצב פרופורציונלי לכמות החומר הקיים. נסמן את כמות החומר בזמן  $t$  ב-  $C(t)$  (באנגלית). כמות החומר מקיימת את המשוואה:

$$C' = a - bC$$

כאשר  $a, b > 0$ .

(א) מצאו את פתרון המשוואה, בתנאי  $C(0) = K$  ( $K \geq 0$ ). פתרון:

$$C = \frac{a}{b} + ce^{-bt} \text{ נקבל: הלינארית ונקבל:}$$

$$K = C(0) = \frac{a}{b} - c \text{ נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:}$$

$$C = \frac{a}{b} - (\frac{a}{b} - K)e^{-bt} \text{ לכן } \frac{a}{b} - K \text{ והפתרון הפרטי הוא:}$$

(ב) הוכיחו שלכל  $K$  מתקיים:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \frac{a}{b}$$

פתרון:

$$C(t) \rightarrow \frac{a}{b} \text{ כאשר } e^{-bt} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \text{ ולכן}$$