תרגיל 10

29 ביוני 2018

1. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

(א) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

(ב) $9y'' + 6y' + y = 0$.

(ג) $y'' - 8y' + 7y = 0$

(ד) $y'' - 2y' + 10 = 0$

(ה) $y'' + 10y = 0$

(ו) $4y'' + 4y' + 1 = 0$

i. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

השורשים הם $\lambda = 2, \frac{1}{2}$, שניהם ממשיים שונים, לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

ii. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (3\lambda + 1)^2$$

השורש הוא $\lambda = -\frac{1}{3}$, הוא יחיד. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{3}x}$$

iii. המשוואה האופיינית היא:

$$0 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)$$

השורשים הם $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1$. לכן הפתרון הוא:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{7x}$$

iv. המשוואה האופיינית היא:

$$0=\lambda^2-2\lambda+10$$

השורשים הם: $\alpha=2\pm 3i$. לכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$$

v. המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2+10=0$$

השורשים הם:$\alpha=\pm\sqrt{10}i$ ולכן הפתרון הוא:

$$y=C_1\cos\sqrt{10}x+C_2\sin\sqrt{10}x$$

המשוואה האופיינית היא:

$$0=\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}=(\lambda+\frac{1}{2})^2$$

יש רק שורש אחד: $\alpha=-\frac{1}{2}$ ולכן הפתרון הוא:

$$y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$$

2. הוכיחו שלכל α, הפונקציות $y_1=e^{\alpha x},y_2=xe^{\alpha x}$ בלתי תלויות.
נחשב את הוורונסקיאן:

$$W(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}\end{pmatrix}=e^{2\alpha x}+\alpha xe^{2\alpha x}-\alpha xe^{2\alpha x}=e^{2\alpha x}\neq 0$$

3. בונוס:
הוכיחו שאם $y''+ay'+by=0$ מקיימת שיש למשוואה האופיינית רק פתרון אחד α, אז $xe^{\alpha x}$ הוא פתרון של המד"ר. (הדרכה: הציבו אותו במשוואה, וחשבו מה העובדה שיש פתרון אחד אומרת על המקדמים, וכן, אם יש פתרון יחיד, למה הוא בהכרח שווה.)
פתרון:

ראשית, נשים לב שאם יש פתרון יחיד אז הדיסקרימיננטה היא 0, כלומר, $a^2-4b=0$ (זאת הדיסקרימיננטה במקרה שלנו).

כעת, נחשב את הנגזרות של $y=xe^{\alpha x}$

$$y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$$

$$y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$.

נציב במשוואה:

$$2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 e^{\alpha x} + a(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) + bxe^{\alpha x} = e^{\alpha x}(2\alpha + \alpha^2 + a + a\alpha x + bx)$$

אבל אם α הוא הפתרון היחיד של המשוואה $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, אז הוא בהכרח שווה ל$-\frac{a}{2}$.

כלומר קיבלנו:

$$e^{\alpha x}(-a + \frac{a^2}{4} + a - \frac{a^2}{2} + b) = e^{\alpha x}(-\frac{a^2}{4} + b) = 0$$

זה נובע מהנתון ש $a^2 - 4b = 0$.

לסיכום, כאשר מציבים את הפונקציה $y = xe^{\alpha x}$ במשוואה $y'' + ay' + b = 0$, מקבלים שוויון. לכן פונקציה זו היא פתרון של המד"ר.