מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ו

מרצה: ארז שיינר. תאריך: 10/09/13

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ 0 & -1<x\le 1 \\ x & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x))\le |x-1|$

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $(1+i)z^4=(1+i)^8-i(1+i)^6$

3. נביט בשני הוקטורים $v=(1,0,1), u=(1,2,0)$.

מצאו וקטור w המאונך ל u וקבוע α כך ש $\alpha u+w=v$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{2n-1}\ln\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}\right)=\frac{\ln(2)+\ln(n)}{2}$

5. פתרו את האינטגרל $\int\left[\left(\mathrm{x}^3+x+1\right)\cdot\arctan(\mathrm{x})\right]dx$

6. <u>הגדרה:</u> אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **אנטי-סימטרי** אם

$$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}:\left((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\right)\to\left(a=b\right)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו אנטי-סימטרי.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם אנטי-סימטרים ואילו אינם אנטי-סימטריים:

$$T=\left\{(n,m)\middle|\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}\right\},\ S=\left\{(\mathrm{n},\mathrm{n}+1)\mid \mathrm{n}\in\mathbb{N}\right\},\ R=\left\{(1,2),(2,1),(1,1)\right\}$$

7. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $B\setminus A=\phi \Leftrightarrow (A\setminus \mathrm{B})\cup B=A$