תרגיל 10

1. הוכיחו כי לכל $0 < y < x$ ו $\alpha > 1$ מתקיים

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^{\alpha} - y^{\alpha} < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^{\alpha}$. הפונקציה רציפה בקטע $[y,x]$ וגזירה בקטע (y,x) לכל $0 < y < x$.

לכן, לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' נקבל כי קיימת נקודה $c \in (y,x)$ כך ש

$$\frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x-y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \alpha c^{\alpha-1}$$

כיוון ש $0 < y < c < x$ ו $\alpha > 1$, נקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha c^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1} \implies \alpha y^{\alpha-1} < \frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x-y} < \alpha x^{\alpha-1}$$

נכפיל את אי השיוויונים ב $x - y > 0$ ונקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^{\alpha} - y^{\alpha} < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

כדרוש.

2. חשבו את הגבולות הבאים (גבול סופי ואינסופי) במידה והגבול לא קיים הסבירו מדוע.

(א) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

(ב) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

(ג) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-x}}$

(ד) $\lim_{x\to\infty} e^{2x}\sin x$

(ה) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}$

(ו) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(ז) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)$

(ח) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(ט) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x-x-1}$

פתרון:

(א) יהי $0 < \epsilon \approx 0$ אינפי חיובי, אזי $f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[5]{\epsilon}}$ מספר איסופי חיובי ולכן $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \infty$

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ו־ $f(x) > 0$ אז $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$

(ב) אם $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ אז $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

פתרון:

(א) הוכחה:

יהי $c \neq a \approx c$. מהגדרת הגבול נובע כי $f(a) \approx 0$, ומהנתון ש $f(x) > 0$ נקבל $0 < f(a) \approx 0$, לכן, $\frac{1}{f(a)}$ מספר אינסופי חיובי כלומר $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(ב) הפרכה ע"י דוגמה נגדית:

ניקח למשל $f(x) = x$. מתקיים כי $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$, אך $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ לא קיים, כיוון שעבור $0 < \epsilon \approx 0$ $\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר איסופי חיובי, ועבור $0 > \epsilon \approx 0$ $\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר איסופי שלילי.