1. מיצאו לאילו ערכי a,b ממשיים הפונקציה הבאה רציפה בקטע $[-1,3]$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x-3}, & -1\le x<3\\ b, & x=3\end{cases}$$

2. יהי $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ פולינום ממעלה שלישית. הוכיחו כי יש לו (לפחות) שורש אחד ממשי.

3. תהי f פונקציה רציפה (כלומר, בכל הממשיים). הוכיחו כי קיים c ממשי כך ש-$f(c)=\frac{c}{1-c^2}$.

4. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הוכיחו כי קיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך ש-$f(x_0)=2\sin(x_0)$.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קיבעו (והוכיחו) האם היא רציפה במ"ש בקטע הנתון:

   א. $f(x)=xsin(x)$ ב-$(0,\infty)$.

   ב. $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ ב-$(0,1)$.

   ג. $f(x)=xsin(\frac{1}{x})$ ב-$(0,1)$.

   ד. $f(x)=\ln(x)$ ב-$(0,\infty)$

   ה. $f(x)=x^3$ ב-$(-\infty,50]$

   ו. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ ב-$[0,\infty)$

6. הוכיחו כי חיבור וכפל בקבוע (ולכן גם חיסור) של פונקציות רציפות במ"ש, הוא פונקציה רציפה במ"ש.

7. תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,\infty)$, ונתון כי קיים $\lim_{x\to\infty}f(x)$. הוכיחו כי f רציפה במ"ש ב-$[a,\infty)$.

<u>הדרכה:</u> יהי $\epsilon>0$ (רישמו לעצמכם מה צריך למצוא). נסמן את הגבול הנתון ב-L. לפי הגדרת הגבול יש A ממשי כך שלכל $x>A$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2}$. מכך ניתן להסיק שלכל $x_1,x_2>A$ מתקיים הדרוש. כעת, f רציפה במ"ש ב-$[a,A+1]$ לכן יש δ' כך ש ..... לסיום הגדירו $\delta=\min(\delta',1)$, והראו שהוא מקיים את הדרוש. *(שימו לב כי אם היינו אומרים רק כי f רציפה במ"ש ב-$[a,A]$ כלומר לא לוקחים חפיפה בין הקטעים, לא היינו מצליחים לסיים את ההוכחה.)*