תרגיל 4

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $a_n = \frac{1}{n}sin(n!)$

פתרון: $\frac{1}{n} \to 0$, $-1 \le \sin(n!) \le 1$ כלומר חסומה ולפי משפט הכפל שלהן שואף לאפס.

ב. $a_n = \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

פתרון: $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \frac{n}{n+2} \to 1$

ג. $a_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון: $\frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ ($a^n \to \infty$ אם $a > 1$, $a^n \to 0$ אם $a < 1$)

ד. $a_n = \frac{3^n}{2^{n^2}}$

פתרון: $n^2 > 2n$ עבור $2 \le n$. לכן פרט לאיבר הראשון $0 \le \frac{3^n}{2^{(n^2)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{(2^2)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$

ה. $a_n = n\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1+1/n-1/n^2}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

ו. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot\left((\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2\right)}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2+\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2} \to 0$$

ז. $a_n = \frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} + \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$

נתחיל מהמחובר השמאלי. נחלק בחזקה הגבוהה (n^3) ונקבל:

$$\frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ומאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{(1+0)(3+0)} = \frac{1}{3}$$

נעבור למחובר הימני. שוב, נחלק בחזקה הגבוהה (הפעם זה 3^n) ונקבל:

$$\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n} = \frac{1+\frac{2^n}{3^n}}{1-\frac{2^n}{3^n}} = \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (הוכח בהרצאה) ומאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

סך הכל, משימוש נוסף באריתמטיקה מקבלים:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{(n^2+1)(3n+1)} + \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}\right) = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

ח. $a_n = \frac{7}{(n+3)\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)}$

ניעזר בכפל בצמוד על מנת לפשט את הביטוי:

$$\frac{7}{n+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+3}-n} = \frac{7}{n+3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)} =$$
$$\frac{7}{n+3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n^2+3-n^2} = \frac{7}{n+3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3} = \frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n+3}$$

נחלק בחזקה הגבוהה (יש לשים לב לחלוקה בתוך השורש) ונקבל:

$$\frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{n+3} = \frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{1+\frac{3}{n}}$$

מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 0$. מאריתמטיקה $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right) = 1$. בתרגול הוכחנו שאם $\{a_n\}$ סדרת מספרים אי-שליליים כך ש-$a_n \to L$ אז $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$. נשתמש בכך ונקבל ש-$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} = 1$. סך הכל, מאריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{7}{3}\cdot\frac{1+1}{1+0} = \frac{14}{3}$$

2. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots\frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

ב. $a_n = \frac{1\cdot sin(1)+2\cdot sin(2)+\cdots+n\cdot sin(n)}{n^3}$

$$0 \le \left|\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3}\right| \le \frac{|1\sin 1|+|2\sin 2|+...+|n\sin n|}{n^3} \le \frac{1+2+...+n}{n^3} < \frac{n\cdot n}{n^3} = \frac{1}{n}$$

ע"פ משפט הסנדויץ' $\left|\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3}\right| \to 0$

ולכן $\frac{1\sin 1+2\sin 2+...+n\sin n}{n^3} \to 0$

ג. $a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2} = \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{2}}$$

. כעת $1 < \sqrt[2^n]{2} < \sqrt[n]{2}$ ולכן ע"פ משפט הסנדויץ' $\sqrt[2^n]{2} \to 1$ והגבול המבוקש הוא 2.

ד. $a_n = \frac{7+cos(2n)}{2-sin(n)} + \frac{5-2nsin(n)}{n}$

ניעזר בזהות הטריגונומטרית $\cos(2\alpha) = 1-2\sin^2(\alpha)$ ונקבל:

$$\frac{7+\cos(2n)}{2-\sin(n)} + \frac{5-2n\sin(n)}{n} = \frac{8-2\sin^2(n)}{2-\sin(n)} + \frac{5-2n\sin(n)}{n} =$$
$$\frac{2(4-\sin^2(n))}{2-\sin(n)} + \frac{5}{n} - 2\sin(n) = \frac{2(2-\sin(n))(2+\sin(n))}{2-\sin(n)} + \frac{5}{n} - 2\sin(n) =$$
$$2(2+\sin(n)) + \frac{5}{n} - 2\sin(n) = 4+2\sin(n)+\frac{5}{n}-2\sin(n) = 4+\frac{5}{n}$$

מאריתמטיקה מקבלים

$$\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}\right) = 4+0 = 4$$

3. הוכיחו לפי הגדרה:

א. אם $lim\ a_n = \infty$ אז $lim\ \sqrt{a_n} = \infty$.

ראשית נשים לב שכיוון ש-$a_n \to \infty$ בפרט יש N החל ממנו $a_n \ge 0$ והסדרה $\sqrt{a_n}$ מוגדרת.

יהי $M > 0$. כיוון ש-$a_n \to \infty$ יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > M^2$. לכל $n > \max(N, N_1)$ מתקיים $\sqrt{a_n} > M$, כדרוש.

ב. אם $lim\ a_n = \infty$ ו-C מספר ממשי חיובי אז $lim\ Ca_n = \infty$.

פתרון: יהי $M \in \mathbb{R}$, $c \cdot a_n > M$ אם ורק אם $a_n > \frac{M}{c}$ (למה מותר לחלק ב־c?)
$a_n \to \infty$ ולכן קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ $a_n > \frac{M}{c}$ ולכן אותו n_0 נקבל $c \cdot a_n > M$

ג. $log_2(log_2(n)) \to \infty$.

פתרון: נוכיח שאם $a_n \to \infty$ אז $\log_2 a_n \to \infty$ ולכן נקבל את הדרוש ע"י הפעלת טענה זו פעמיים.

תהי סדרה $a_n \to \infty$. רוצים להראות $\log_2 a_n \to \infty$. יהי $M > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 2^M$ כלומר $\log_2 a_n > M$ כדרוש.

ד. $a_n \to \infty$ אמ"מ $-a_n \to -\infty$.

תהי $a_n \to \infty$ נראה כי $-a_n \to -\infty$. יהי $M < 0$. כיוון ש-$a_n \to \infty$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > -M$ ולכן $-a_n < M$ כדרוש.

תהי a_n כך ש- י $-a_n \to -\infty$, נראה כי $a_n \to \infty$. יהי $M > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $-a_n < -M$ ולכן $a_n > M$ כדרוש.

4. הוכיחו / הפריכו:

א. אם $a_n \to \infty$ ו-$b_n \to \infty$ אז $a_n + b_n \to \infty$.

הוכחה: יהי $M>0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $b_n > 0$. לכן לכל $n > \max(N, N_2)$ מתקיים $a_n + b_n > M + 0 = M$ כדרוש.

ב. אם $|a_n| \to \infty$ ו-$|b_n| \to \infty$ אז $|a_n + b_n| \to \infty$.

הפרכה: $a_n = n, b_n = -n$

ג. אם $|a_n| \to \infty$ ו-$|b_n| \to \infty$ אז $|a_n b_n| \to \infty$.

הוכחה: יהי $M > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| > M$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n| > 1$. לכן לכל $n > \max(N, N_2)$ מתקיים $|a_n b_n| = |a_n||b_n| > M \cdot 1 = M$ כדרוש.

ד. אם $a_n \to \infty$ ו-b_n מתכנסת במובן הצר (כלומר מתכנסת למספר ממשי), אז $a_n b_n$ מתכנסת במובן הרחב (כלומר מתכנסת למספר ממשי או ל-$\pm\infty$).

הפרכה: $a_n = n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ה. אם $a_n \to \infty$ ו-$b_n \to 0$ אז $\frac{b_n}{a_n} \to 0$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|b_n| < \varepsilon$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $a_n > 1$. לכן לכל $n > \max(N_1, N_2)$ מתקיים $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| = \frac{|b_n|}{|a_n|} < |b_n| < \varepsilon$ כדרוש.

ו. אם $a_n \to \infty$ ו-$b_n \to 0$, וקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $b_n \neq 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$.

הפרכה: $a_n = n, b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ז. אם $a_n \to \infty$ ו-$b_n \to 0$, וקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ טבעי מתקיים $b_n > 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$.

הוכחה: יהי $M > 0$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > M$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n| < 1$. נתון $b_n > 0$ כלומר לכל $n > N_2$ מתקיים $0 < b_n < 1$.

לכן לכל $n > \max(N_1, N_2)$ מתקיים $\frac{a_n}{b_n} > a_n > M$ כדרוש.

5. תנו דוגמאות של שתי סדרות $(a_n),(b_n)$ המתכנסות כל אחת מהן ל-0, כך ש-

א. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל-0.

$$a_n=\frac{1}{n^2}, b_n=\frac{1}{n}$$

ב. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת למספר ממשי שאיננו 0.

$$a_n=\frac{256}{n}, b_n=\frac{1}{n}$$

ג. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל-∞.

$$a_n=\frac{1}{n}, b_n=\frac{1}{n^2}$$

ד. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ מתכנסת ל-$-\infty$.

$$a_n=\frac{-1}{n}, b_n=\frac{1}{n^2}$$

ה. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ לא מתכנסת (גם לא במובן הרחב).

$$a_n=\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{n}, b_n=\frac{1}{n}$$