<u>תזכורת:</u>

סכום של תתי־מרחבים – יהיו V מרחב וקטורי (מעל שדה $\mathbb{F}$) ו־$U_1, U_2 \leq V$ תתי־מרחבים, הסכום $U_1 + U_2$ הוא תת־המרחב הקטן ביותר שמכיל גם את U_1 וגם את U_2, והוא מוגדר כך:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

נדגיש: $v \in U_1 + U_2$ אם ורק אם קיימים $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ כך ש: $v = u_1 + u_2$.

<u>לדוגמה:</u>

$V = \mathbb{R}^3$, ו:

$$U_1 = \{(x,y,0) | x,y \in \mathbb{R}\}, U_2 = \{(a,0,c) | a,c \in \mathbb{R}\}$$

הסכום הוא:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = \{(x,y,0) + (a,0,c) | x,y,a,c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x+a,y,c) | x,y,a,c \in \mathbb{R}\}$$

כעת, למשל, $(1,1,1) \in U_1 + U_2$, מכיוון ש: $(1,1,1) = (1,1,0) + (0,0,1)$, כאשר: $(1,1,0) \in U_1, (0,0,1) \in U_2$. דרך נוספת: $(1,1,1) = (0,1,0) + (1,0,1)$, כאשר: $(0,1,0) \in U_1, (1,0,1) \in U_2$.

<u>סכום ישר:</u>

אם $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, נאמר שהסכום $U_1 + U_2$ **ישר** ונסמן: $U_1 \oplus U_2$. נדגיש – זו לא פעולה אחרת או שונה מסכום, זהו שם חדש/סימון חדש לסכום במקרה מסוים.

למשל – בדוגמה האחרונה, הסכום לא ישר, למשל: $(1,0,0) \in U_1 \cap U_2$, לכן החיתוך שונה מאפס.

מצד שני, אם נתבונן ב: $U_1 = \{(0,y,0) | y \in \mathbb{R}\}, U_2 = \{(a,0,c) | a,c \in \mathbb{R}\}$ אז $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ולכן הסכום ישר.

דוגמה נוספת: $V = \mathbb{F}^{n \times n}$, $U_1 = \{A \in V | A = A^t\}, U_2 = \{A \in V | A = -A^t\}$.

אם $A \in U_1 \cap U_2$, מצד אחד: $A = A^t$ ומצד שני $A = -A^t$. לכן: $A = -A$,

ומכאן: $A=0$. לכן: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
הערה: לכאורה, עכשיו רק הראנו הכלה בכיוון אחד: $U_1 \cap U_2 \subseteq \{0\}$. זאת, כי ההכלה בכיוון השני - 0 נמצא במרחב - תמיד נכונה (כחלק מההגדרה של מרחב וקטורי) ואין צורך להראות אותה.

משפט:
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U_1, U_2 \leq V$ תתי־מרחבים. אזי, $U_1 \oplus U_2 = V$ אם ורק אם כל וקטור $v \in V$ אפשר להציג באופן יחיד כסכום של $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$; במילים אחרות,לכל $v \in V$ קיימים $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ יחידים כך ש: $v = u_1 + u_2$.
הוכחה - בסיכום.
לדוגמה:
הסכום $U_1 \oplus U_2$ הוא ישר, כאשר: $V = \mathbb{F}^{n\times n}, U_1 = \{A \in V | A = A^t\}, U_2 = \{A \in V | A = -A^t\}$. כל מטריצה $B \in V$ אפשר לרשום כסכום של מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי־סימטרית, באופן הבא:

$$B = \left(\frac{B+B^t}{2}\right) + \left(\frac{B-B^t}{2}\right)$$

לכן: $U_1 \oplus U_2 = V$, ולפי המשפט פירוש הדבר שזו הדרך היחידה לרשום את B כסכום של סימטרית ואנטי־סימטרית.

צירופים ליניאריים:
יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ וקטורים, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ סקלרים. הסכום:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots a_n v_n$$

נקרא **צירוף ליניארי** של הוקטורים $v_1, \ldots, v_n$. לא משנה מה הסקלרים, מדובר בצירוף ליניארי.
דוגמאות:
$V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,2,4), v_2 = (1,0,-1)$, ועם הסקלרים: $a_1 = 6, a_2 = 4$ נקבל את הצירוף הליניארי:

$$6 \cdot (1,2,4) + 4 \cdot (1,0,-1) = (10,12,20)$$

איך נקבע אם וקטור מסוים הוא צירוף ליניארית של וקטורים אחרים? למשל, בדוגמה שלנו, נשאל את השאלה הבאה: האם $v = (2,5,5)$ הוא צירוף ליניארי של v_1, v_2? לפי ההגדרה, השאלה היא האם קיימים סקלרים a_1, a_2 כך ש:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

כלומר:

$$(2,5,5) = a_1 (1,2,4) + a_2 (1,0,-1) = (a_1 + a_2, 2a_1, 4a_1 - a_2)$$

קיבלנו 3 משוואות, משוואה מכל רכיב:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 + a_2 = 2 \\ 2a_1 = 5 \\ 4a_1 - a_2 = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & -3 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{10} \end{array} \right)$$

שורת סתירה - אין פתרון, ולכן לא קיימים סקלרים כאלה, כלומר v איננו צירוף ליניארי של v_1, v_2.

באופן כללי, כשנרצה לבדוק האם v הוא צירוף ליניארי של $v_1, v_2, \dots v_n$, נשים את הוקטורים $v_1, \dots, v_n$ בעמודות מטריצה, את הוקטור v בעמודה הנוספת, ונדרג. אם יש פתרון - v צירוף ליניארי שלהם, אם לא - אז לא.

מה נעשה כשמדובר בפולינומים או מטריצות? "נתרגם" את הפולינומים/מטריצות לוקטורים, למשל:

$$ax^2 + bx + c \mapsto (a,b,c)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \mapsto (a,b,c,d)$$

דוגמה נוספת - האם $\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$ היא צירוף ליניארי של המטריצות:

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 5 & -5 \\ 7 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 9 & 4 \end{array} \right)$$

נשים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 5 & 1\\ 2 & 7 & 9 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 5 & 1\\ 0 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & -\frac{17}{5}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{13} \end{array}\right)$$

אין פתרון – לכן התשובה היא לא.
אם יש פתרון, אז הפתרון הוא הסקלרים בצירוף.
<u>הערה:</u> נשים לב ש־0 הוא צירוף ליניארי של כל קבוצת וקטורים (לא ריקה), כי: $0_V = 0_{\mathbb{F}}\cdot v_1 + \cdots + 0_{\mathbb{F}}\cdot v_n$ (כל הסקלרים הם אפסים).

<u>המרחב הנפרש:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ קבוצת וקטורים. המרחב הנפרש ע"י A מסומן: $span\left(A\right)$ או $sp\left(A\right)$, זו קבוצת כל הצירופים הליניאריים שאפשר לבנות מאיברי A:

$$sp\left(A\right)=\left\{a_1v_1+\cdots+a_nv_n|a_i\in\mathbb{F},v_i\in A,1\leq i\leq n\right\}$$

נשים לב שהקבוצה A יכולה להיות אינסופית, אבל בצירוף ליניארי תמיד משתתפים מספר סופי של וקטורים.
כדי להשלים את ההגדרה, נגדיר: $sp\left(\emptyset\right)=\left\{0\right\}$.
למשל:

$$sp\left(\left\{\left(1,2,4\right),\left(1,0,-1\right)\right\}\right)=\left\{a_1\cdot\left(1,2,4\right)+a_2\cdot\left(1,0,-1\right)|a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\left(a_1+a_2,2a_1,4a_1-a_2\right)|a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$$

<u>תכונות/הערות:</u>

1. $sp\left(A\right)$ הוא תמיד תת־מרחב וקטורי. יתר על כן, זהו תת־המרחב הקטן ביותר שמכיל את A. כלומר, אם U תת־מרחב שמכיל את A, בהכרח: $sp\left(A\right)\subseteq U$.

2. אפשר לשאול איך sp מתנהג ביחס להכלה, חיתוך וסכום/איחוד, למשל האם מתקיים:

$$A \subseteq B \to sp\left(A\right) \subseteq sp\left(B\right)$$

$$sp\left(A \cup B\right) = sp\left(A\right) + sp\left(B\right)$$

$$sp\left(A \cap B\right) = sp\left(A\right) \cap sp\left(B\right)$$

3. $v \in sp\left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$ אם ורק אם v הוא צירוף ליניארי של $v_1, \ldots, v_n$, ואנחנו יודעים איך לבדוק זאת (לשים בעמודות וכו').
4. נדגיש: $v \in sp\left(A\right)$ אם ורק אם קיימים $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}, v_1, \ldots, v_n \in A$ כך ש: $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. בפרט, $v \in sp\left\{v_1, \ldots, v_n\right\}$ אם ורק אם קיימים $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ כך ש: $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.
5. אם U תת־מרחב, $sp\left(U\right) = U$. בפרט, $sp\left(sp\left(A\right)\right) = sp\left(A\right)$.

<u>קבוצה פורשת:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצה $A \subseteq V$ נקראת קבוצה פורשת, אם: $sp\left(A\right) = V$. למשל:

$$A = \left\{\left(1,0,0\right), \left(0,1,0\right), \left(0,0,1\right), \left(14,2,7\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

מצד אחד, ברור ש: $sp\left(A\right) \subseteq \mathbb{R}^3$. מצד שני, כל וקטור $\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3$ אפשר להציג כצירוף ליניארי של איברי A:

$$\left(x,y,z\right) = x\left(1,0,0\right) + y\left(0,1,0\right) + z\left(0,0,1\right) + 0 \cdot \left(14,2,7\right)$$

ולפי הגדרת המרחב הנפרש: $\left(x,y,z\right) \in sp\left(A\right)$, ולכן: $sp\left(A\right) = \mathbb{R}^3$. לפי ההגדרה, A פורשת את $\mathbb{R}^3$.

אפשר גם לומר שהוקטורים $\left(1,0,0\right), \left(0,1,0\right), \left(0,0,1\right), \left(14,2,7\right)$ פורשים.

אפשר לשים לב שבמובן מסוים, הוקטור $\left(14,2,7\right)$ קצת מיותר; אפשר היה להציג כל וקטור במרחב כצירוף של איברי A גם בלעדיו.

נגדיר פורמלית את המושג של וקטור "מיותר".

<u>תלות ליניארית:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר שוקטורים $v_1,\dots v_n\in V$ הם תלויים ליניארית (ת"ל), אם קיימים סקלרים $a_1,\dots a_n\in\mathbb{F}$ שלפחות אחד מהם שונה מ־0 כך ש: $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$. אם קבוצה A מכילה וקטורים תלויים ליניארית, אפשר לומר שהקבוצה תלויה ליניארית. למשל:

$$14\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)+7\cdot(0,0,1)+-1\cdot(14,2,7)=(0,0,0)$$

הסקלרים בצירוף הליניארי שמתאפס הם: $14,2,7,-1$ (לפחות אחד מהם שונה מ־0...) ולכן הוקטורים תלויים ליניארית; במילים אחרות, הקבוצה $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(14,2,7)\}$ תלויה ליניארית.

נשים לב, שלפי ההגדרה אם $0\in A$ אז A תלויה ליניארית: $1\cdot 0=0$, והסקלר 1 שונה מ־0...

אם הקבוצה לא תלויה ליניארית, נאמר שהקבוצה היא בלתי תלויה ליניארית (בת"ל). לפי ההגדרה, אפשר לומר שהקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ היא בת"ל אם ורק אם:

$$a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0\iff a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

במילים: אם צירוף ליניארית מתאפס, בהכרח כל הסקלרים חייבים להיות אפסים. לצירוף ליניארי שבו כל הסקלרים אפסים אפשר לקרוא צירוף ליניארית טריוויאלי. לכן, אפשר לומר שקבוצת וקטורים היא בת"ל אם ורק אם הצירוף הליניארי היחיד שמתאפס הוא הצירוף הטריוויאלי. למשל, נבדוק האם הקבוצה $A=\{(0,1,0),(0,0,1),(14,2,7)\}$ בת"ל. לפי ההגדרה, ניקח סקלרים a_1,a_2,a_3 כך ש:

$$a_1(0,1,0)+a_2(0,0,1)+a_3(14,2,7)=(0,0,0)$$

ונבדוק האם בהכרח $a_1=a_2=a_3=0$. אם כן - בת"ל, אם לא - לא. אם כן:

$$(14a_3,a_1+2a_3,a_2+7a_3)=(0,0,0)\Longrightarrow\begin{cases}14a_3=0\\a_1+2a_3=0\\a_2+7a_3=0\end{cases}\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=0$$

והוקטורים/הקבוצה אכן בת"ל.

<u>ברמה הטכנית:</u>

1. איך נבדוק אם קבוצה A פורשת מרחב V? ניקח וקטור כללי במרחב (למשל, אם $V=\mathbb{R}^3$ אז וקטור כללי הוא (x,y,z), אם $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ אז וקטור כללי הוא $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ וכן הלאה), נשים אותו בעמודה נפרדת, את הוקטורים של A בעמודות מטריצה ונדרג; אם תמיד יש פתרון (לא משנה מהם x,y,z או a,b,c,d וכן הלאה) אז הקבוצה פורשת.

2. איך נבדוק שקבוצה A היא בת"ל? יש שתי דרכים. דרך אחת היא לשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ולדרג. אם יש משתנה חופשי - לא בת"ל, אם אין משתנה חופשי - בת"ל. דרך שניה, לשים את הוקטורים בשורות מטריצה ולדרג. אם יש שורת אפסים - לא בת"ל, אם אין שורת אפסים - בת"ל.

למשל, נבדוק האם הקבוצה: $\{x^2+x+2, 2x^2-x+1, 4x^2-5x-1, 5x+7\}$ היא בת"ל ($V=\mathbb{R}_2[x]$), בשתי הדרכים. קודם כל, "נתרגם" לוקטורים: $\{(1,1,2),(2,-1,1),(4,-5,-1),(0,5,7)\}$. בדרך הראשונה, נשים בעמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

אפילו בלי לדרג אנחנו רואים שחייב להיות משתנה חופשי (=עמודה בלי איבר מוביל), כי יש יותר עמודות משורות. לכן, הקבוצה לא בת"ל. בדרך השניה, נשים בשורות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

נדרג ונראה שאכן מקבלים שורת אפסים.

אם נרצה לבדוק שהקבוצה פורשת, ניקח וקטור כללי (a,b,c), נשים בעמודה

נפרדת ונבדוק האם תמיד יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & a \\ 1 & -1 & -5 & 5 & b \\ 2 & 1 & -1 & 7 & c \end{array}\right)$$

כעת, נציג כמה משפטים וטענות שיבהירו את הקשר בין בת"ל, פורשת ומה שמסביב.

<u>משפט:</u>

מנסח כמו שצריך מה זה וקטור "מיותר".

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. A ת"ל – קיימים סקלרים, לא כולם 0, כך שצירוף ליניארי של איברי A מתאפס.
2. קיים וקטור $v \in A$ שהוא צירוף ליניארי של האחרים. בדוגמה שלנו – $(14, 2, 7)$ הוא צירוף של $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
3. קיים וקטור $v \in A$ כך ש: $sp(A) = sp(A \backslash \{v\})$, כלומר v הוא "מיותר". בדוגמה שלנו – $(14, 2, 7)$.

הוכחה – בסיכום.

למה – $Lemma$, טענה/משפט שעוזרים בדרך כלל להוכיח משהו אחר.

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ בת"ל. יהי $v \in V$ שלא נמצא ב־A. אזי, $A \cup \{v\}$ בת"ל אם ורק אם $v \notin sp(A)$. (אם ת"ל זה מיותר, אז בת"ל זה לא מיותר...)

כמו כן, עבור $a \in A$, $A \backslash \{a\}$ לא פורשת את V: $sp(A \backslash \{a\}) \neq V$ (הקבוצה בת"ל ולכן הוקטור שהורדנו הוא לא מיותר, אלא הכרחי לפורשת, ולכן אם מורידים אותו הקבוצה בוודאי לא פורשת). במילים: אם מורידים וקטור מקבוצה בת"ל, היא בוודאות לא פורשת.

<u>משפט (שטייניץ):</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ בת"ל. תהי $B \subseteq V$ פורשת. לכל $a \in A$, קיים $b \in B$ שלא נמצא ב־$A \backslash \{a\}$ כך ש: $(A \backslash \{a\}) \cup \{b\}$

בת"ל. אינטואיטיבית, הקבוצה A בת"ל ולכן כל וקטור שנוריד הוא וקטור לא מיותר; מכיוון ש־B פורשת, את ה"חוסר" שנוצר ב־A אפשר "למלא" ע"י איבר מ־B.

<u>בסיס:</u>

קבוצה בת"ל ופורשת נקראת בסיס. אנחנו נתעסק במרחבים שהם נוצרים סופית - יש להם בסיס סופי. למשל:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\{(0,1,0),(0,0,1),(14,2,7)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$. הגודל של הבסיס נקרא **המימד** של המרחב, ומסומן $\dim V$. באופן כללי:

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

נשים לב שהבסיס: $\{1,x,\ldots,x^n\}$ מכיל $n+1$ איברים.

$$\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$$

אפשר לבחור כבסיס את הקבוצה: $\{E_{ij} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, מטריצות שיש להן 1 במקום ה־ij והשאר אפסים. למשל, בסיס של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}, \ldots \right\}$$