מבחן מועד ב' - תשפ"ו

שימו לב – מותר ורצוי במהלך המבחן להיעזר בגבולות הידועים הבאים:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln(x)=0$$

1. (30 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

א. (10 נק')

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot e^{3\cdot x}-x\cdot e^{-x}}$$

ב. (10 נק')

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x)^{2\cdot x}-1}{x\cdot\ln(x)}$$

ג. (10 נק')

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\sqrt{\sqrt{9\cdot x^2+7}+46\cdot x}+x-\sqrt{x}}$$

א) נשים לב ש: $\cos x \xrightarrow[x\to0]{} 1$ ולכן: $1-\cos^2 x \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

בנוסף: $e^{-x}, e^{3x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$ ולכן: $xe^{3x}, xe^{-x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$

ולכן: $xe^{3x}-xe^{-x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

$1-\cos^2 x, xe^{3x}-xe^{-x}$ גזירות בכל סביבה מנוקבת של 0 [פונקציות אלמנטריות] והמכנה שונה מ-0 בכל סביבה כזו.

לכן ננסה לופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{xe^{3x}-xe^{-x}} \overset{\text{לופיטל}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to0}\frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{e^{3x}+e^{3x}\cdot3x-e^{-x}-e^{-x}\cdot(-1)\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \sin x}{(3x+1)\cdot e^{3x} + (x-1)\,e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin 2x}^{\to 0}}{\underbrace{(3x+1)\,e^{3x} + (x-1)\,e^{-x}}_{\to(1\cdot 1-1\cdot 1)=0}} =$$

לופיטל

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3e^{3x} + e^{3x}\cdot 3\cdot(3x+1) + e^{-x} + e^{-x}\cdot(-1)\cdot(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2\cos 2x}^{\to 2\cdot 1=2}}{\underbrace{e^{3x}(9x+6) + e^{-x}(-x+2)}_{\to 1(0+6)+1(0+2)=6+2=8}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

[illegible].

(ב)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2x}-1}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln\left(x^{2x}\right)}-1}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x\ln x}-1}{x\ln x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{2x\ln x}-1}{2x\ln x}}_{\to 1} \cdot 2 = 1\cdot 2 = 2$$

כי $x\ln x \to 0$

ו- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

(ג)

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x} - \sqrt{x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x-x}{\sqrt{\sqrt{x\left(\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46\right)}+x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2\left(9+\frac{7}{x^2}\right)}+46x}}{\sqrt{x\left(\frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}}+1\right)+\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x\left(\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46\right)}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}}+1}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}}+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}}+1}+1} \longrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{9+0}+46}}{\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{9+0}+46}}{\infty}+1}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3+46}}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{\sqrt{49}}{1+1} = \frac{7}{2}.$$

כנדרש.

2. (36 נק') יהי פרמטר חיובי $0 < a \in \mathbb{R}$. נביט בסדרה

$$a_n = n^{4\cdot a} \cdot (\ln(n^3+5) - 3\cdot \ln(n))$$

א. (12 נק') כתבו את כל הגבולות האפשריים של הסדרה a_n.

ב. (12 נק') מצאו ערך של הפרמטר החיובי a עבורו הטור הבא מתכנס **בתנאי**. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

ג. (12 נק') מצאו ערך של הפרמטר החיובי a עבורו הטור מהסעיף הקודם מתכנס **בהחלט**. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

(א)

$$a_n = n^{4a}\left(\ln\left(n^3+5\right) - 3\ln(n)\right) = n^{4a}\left(\ln\left(n^3+5\right) - \ln\left(n^3\right)\right) =$$

$$= n^{4a}\ln\left(\frac{n^3+5}{n^3}\right) = n^{4a}\ln\left(1+\frac{5}{n^3}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{\left(n^{4a}\right)}\right) =$$

$$= \ln\left(\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)^{n^{4a-3}}\right) = n^{4a-3}\,\underbrace{\ln\left(\underbrace{\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}}_{\to e^5}\right)}_{\to 5} \quad "\longrightarrow" \; 5n^{4a-3}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 5 & a = \frac{3}{4} \\ \infty & a > \frac{3}{4} \\ 0 & a < \frac{3}{4} \end{cases}$$

, כנדרש.

(ב) צ"ל ערך של a כך ש: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ יתכנס בתנאי.

נשים לב ש:

$$a_n = n^{4a-3}\cdot ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)$$

נבחר $a = \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$a_n = n^{-1}\cdot ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right) = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)}{n}$$

לבסוף: $\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right) \to 5$ ולכן לבסוף $\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n3}\right) \geq 1$ ולכן,

$$a_n = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n3}\right)}{n} \geq \frac{1}{n}$$

וממבחן ההשוואה הראשון, נקבל ש: $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$,

ההתכנסות תלויה רק בזנב ולכן הזנב של הטור מתבדר וגם הטור שלנו יתבדר.

ולכן הטור $\sum (-1)^n a_n$ לא מתכנס בהחלט.

נראה שמתכנס בתנאי:

נראה ש: a_n מונוטונית יורדת ל- 0.

ראשית, בסעיף א' ראינו שהיא שואפת ל- 0 [$a=\frac{1}{2}$].

<u>נראה מונוטונית יורדת:</u>

נמצא את הנגזרת של הפונקציה המתאימה:

$$f(x) = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{x^3}\right)}{x} = x^2 \ln\left(1+\frac{5}{x^3}\right).$$

$$f'(x) = 2x\ln\left(1+\frac{5}{x^3}\right) + \frac{1}{1+\frac{5}{x^3}} \cdot \left(\frac{-3x^2 \cdot 5}{x^6}\right) \cdot x^2 =$$

$$= 2x\ln\left(1+\frac{5}{x^3}\right) + \frac{1}{\frac{x^3+5}{x^3}} \cdot \left(-\frac{15}{x^2}\right) =$$

$$= 2x\ln\left(1+\frac{5}{x^3}\right) - \frac{15x}{x^3+5} = x\left(\frac{2\ln\left(1+\frac{5}{x^3}\right)(x^3+5) - 15}{x^3+5}\right) =$$

$$= \frac{x}{x^3+5}\left(2\ln\left(\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{x^3+5}\right) - 15\right) =$$

כעת:

$$\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{x^3+5} = \left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{x^3}\cdot\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{5} \longrightarrow e^5\cdot 1 = e^5$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\left(1+\frac{5}{x^3}\right)^{x^3+5}\right)-15 \longrightarrow 2\ln(e^5)-15 = 2\cdot 5-15 = -5$$

ולכן הנגזרת לבסוף שלילית (כי הביטוי הימני שואף ל- 5-
והשמאלי חיובי ולכן המכפלה שלילית) ולכן הפונקציה לבסוף
יורדת, ולכן משלב מסוים $f(n+1) < f(n)$, כנדרש.

לכן a_n מונו׳ יורדת (לבסוף) ל-0 ומלייבניץ אכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.
סך הכל, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס בתנאי, כנדרש.

(ג) כל ערך של a עבורו $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ יתכנס בהחלט,
כלומר, ערך של a עבורו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

נזכור ש: $a_n = n^{4a-3}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)$.

נבחר $n=\frac{1}{4}$ ונקבל:

$$a_n = n^{-2}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right) = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)}{n^2}$$

$\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right) \longrightarrow \ln(e^5)=5$ ולכן לבסוף $\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)\le 10$

ולכן, לבסוף:

$a_n = \frac{\ln\left(\left(1+\frac{5}{n^3}\right)^{n^3}\right)}{n^2} \le \frac{10}{n^2}$ וממבחן

ההשוואה הראשון, נקבל ש:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \le \sum_{n=N}^{\infty}\frac{10}{n^2} = 10\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

ההתכנסות תלויה רק בזנב ולא משתנה ע"י כפל בקבוע

ולכן

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n<\infty \Longleftarrow 10\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty \Longleftarrow [\text{ידוע}]\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

$\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס בהחלט כנדרש.

3. (42 נק') יהי פרמטר $a\in\mathbb{R}$ ותהי פונקציה:

$$f(x)=\sqrt{|(x-a^2-2\cdot a)(x+a+2)|}$$

א. (18 נק') מצאו ערך של הפרמטר a וערך של הנקודה x כך שהפונקציה אינה גזירה בנקודה x.

ב. (12 נק') מצאו ערך של a עבורו הפונקציה גזירה בכל הממשיים. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

ג. (12 נק') מצאו ערך של a עבורו לא קיימת נקודה x בה $f'(x)=0$. אם אין ערך כזה (של a), ציינו זאת ונמקו מדוע.

(א) נבחר למשל $a=0$ ונחפש x: $f(x)=\sqrt{|x(x+2)|}$.

נראה שאינה גזירה ב-$x=0$:

$$f'(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{|h(h+2)|}-\sqrt{|0(0+2)|}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{|h(h+2)|}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h(h+2)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h+2}}{\sqrt{h}}=\lim_{h\to0^+}\sqrt{1+\frac{2}{h}}=\infty$$

הגבול לא קיים במובן הצר ולכן לא גזירה ב-0.

ב. נזכור ש: $f(x)=\sqrt{|(x-2a-a^2)(x+a+2)|}$.

נראה ש- $f(x)$ אינה גזירה עבור $x=-a-2$, לכל a שנבחר.

$$f'(-a-2)=\lim_{x\to(-a-2)}\frac{f(x)-f(-a-2)}{x-(-a-2)}=$$

$$=\lim_{x\to(-a-2)}=\frac{\sqrt{|(x-a^2-2a)(x+a+2)|}-0}{x+a+2}=\lim_{x\to(-a-2)}\sqrt{|x-a^2-2a|}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{|x+a+2|}}{x+a+2}}_{\to\pm\infty}$$

$$\sqrt{|x-a^2-2a|}\longrightarrow\sqrt{|-a-2-a^2-2a|}=\sqrt{|a^2+3a+2|}=\sqrt{|(a+2)(a+1)|}$$

כאשר, אם $a\neq-1,-2$ אזי ברור שהנגזרת לא קיימת במובן הצר [שהרי המוצא $\neq 0$ כפול $\pm\infty=\pm\infty$].

נבדוק את $a=-1$:

$$f(x)=\sqrt{|(x+1)(x+1)|}=\sqrt{|(x+1)^2|}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$$

נראה שלא רציפה ב- -1:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|-1+h+1|-|-1+1|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0^+}1=1$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{|-1+h+1|-|-1+1|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}-\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}-1=-1$$

הגבולות החד צדדים שונים ולכן לא גזירה בכל $\mathbb{R}$ עבור $a=-1$.

נבדוק את $a=-2$:

$$f(x)=\sqrt{|x\cdot x|}=\sqrt{|x^2|}=\sqrt{x^2}=|x|$$

נראה שלא רציפה ב- 0:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-|0|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-|0|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}-\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$

הגבולות החד צדדים שונים ולכן לא גזירה בכל $\mathbb{R}$ עבור $a=-2$.

סך הכל, אכן f לא גזירה בכל $\mathbb{R}$ לכל a שנבחר. כנדרש

(ג) ראינו שב- $a=-2$ מתקבלים ש: $f(x)=|x|$.

אזי, עבור $x>0$ נקבל:

$$f(x)=|x|=x \Longrightarrow f'(x)=x'=1\neq 0$$

ועבור $x<0$ נקבל:

$$f(x)=|x|=-x \Longrightarrow f'(x)=(-x)'=-1\neq 0$$

בנוסף, ראינו שלא גזירה ב- $x=0$ ולכן אין נקודה בה הנגזרת מתאפסת.