תרגול 8-9

13 ביוני 2016

המרחב הנפרש (span)

הקדמה/מוטיבציה: ראינו בשיעור קודם ש $S=\{(x,y)\,|\,x,y\geq 0\}\subset\mathbb{R}^2$ אינו תת מרחב.
אנו רוצים להוסיף ל S ווקטורים כך שהקבוצה החדשה $S\subset W$ תהיה תת מרחב.
עפ"י הגדרת תת מרחב ברור כי Wמכילה את כל הצ"ל של איברי S כי $S\subset W$ ו W סגור לחיבור וכפל בסקאר.
לכן מגדירים:
הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\ldots,v_n\in V$
אזי $span(\{v_1,v_2\ldots,v_n\})=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n\,|\,\alpha_i\in\mathbb{F}\}$
ובאופן כללי $\emptyset\neq S\subset V$ אזי $span(S)=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n\,|\,\alpha_i\in\mathbb{F},v_i\in S\}$.
אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

דוגמא $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $S=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ ננסה להבין מבחינה גאומטרית

מהו תת המרחב $span(S)$?

פתרון : $span(S)=\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

כלומר מישור xy בתוך המרחב.
משפט: בסימונים לעיל $span(S)\subset V$ הינו תת מרחב שמכיל את S. והוא הכי קטן (כלומר אם $S\subset W$ אזי $W\subset span(S)$).

תרגיל: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $S=\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\}$

1. האם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in span(S)$?
2. מהו $span(S)$? (מבחינה גאומטרית)

פיתרון:

1. האם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in span(S)$?

   נבדוק האם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

   כך ש $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$?

   שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\1&3&2&0\end{array}\right)$ קיים פתרון?

נבדוק $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

יש פתרון למערכת לדוגמא (אם נבחר שרירותית $\alpha_3 = 0$) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$

ואכן $3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. מהו $span(S)$?

באופן דומה נבדוק אלו וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in span(S)$

נבדוק תחת אלו תנאים על a, b קיימים a_1, a_2, a_3 כך ש־

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

נדרג את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3a-2b \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right)$$

פיתרון כללי: $a_3 = t,\ a_1 = 3a - 2b + 10t,\ a_2 = b - a - 4t$.

ואכן עבור $t = 0$ מתקיים: $(3a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

כלומר $span(S) = \mathbb{R}^2 = V$ (כל וקטור ב־$\mathbb{R}^2$ ניתן לייצג כצירוף לינארי של וקטורים מ־S)

הערה: בפרט $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$ ולכן S ת"ל.

ובנוסף, $span(S) = span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$.

תרגיל: $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$ והאם S בת"ל ?

פתרון רוצים למצוא את כל המטריצות $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

כך ש $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

נייצג כל מטריצה באמצעות וקטור. למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

כעת השאלה שקולה ל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ולכן, כמו קודם נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \\ 1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 3 & 1 & d-b \\ 0 & 2 & 2 & a-b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b-\frac{d-b-3c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & c+\frac{d-b-3c}{2} \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array}\right)$$

אם נבחר $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ רואים כי חייבים לקחת $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ ולכן S בת"ל

בנוסף רק אם $a-b-2c=0$ יש פתרון למערכת ולכן

$$span(S) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b-2c=0\} = \{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\} =$$

$$\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

הגדרה: אם $span\,(S) = V$ נאמר ש־S פורשת את המרחב V.

דוגמאות:

$V = \mathbb{R}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את V. כי כל וקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ אינו פורש את V כמו שראינו בתרגיל $span\,(S) \neq V$ (לדוגמה הוקטור $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ אינו נמצא בקבוצה הנפרשת על ידי S)

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל

נניח שקיים $v \in V \backslash span(S)$. הוכח: $S^{'} = \{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל.

הוכחה: צריך להוכיח כי: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n + \alpha v = 0 \to \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \alpha = 0$

נניח כי $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n + \alpha v = 0$

$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = -\alpha v$

$\Leftarrow \alpha = 0$ כי אחרת נקבל $\frac{\alpha_1}{-\alpha}v_1 + \frac{\alpha_2}{-\alpha}v_2 + \cdots \frac{\alpha_n}{-\alpha}v_n = v$
בסתירה לנתון ש־ $v \notin span(S)$.
$\Leftarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0$ $\Leftarrow$ $\alpha_i = 0$ כי S בת"ל.
תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.
אזי $span(S) = span(S')$ כאשר $S' = \{v_1, \dots v_{n-1}\}$
פתרון: נראה הכלה דו כיוונית:
$\supseteq$: יהי $v \in span(S')$ אזי קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ כך ש־ $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$ אולם $v_1, \dots, v_{n-1} \in S$ ולכן $v \in span\,(S)$
$\subseteq$: יהי $v \in span(S)$ אזי קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n$ כך ש־ $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n = v$
v_n ת"ל ב־ $v_1, \dots, v_{n-1}$ ולכן קיימים $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ כך ש־ $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} = v_n$
נציב את v_n במשוואה לעיל ונקבל
$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_{n-1} v_{n-1} = v$ לאחר כינוס איברים נקבל:
$v = (\alpha_1 + \beta_1)\,v_1 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})\,v_{n-1}$ ולכן $v \in span\,(S')$

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ בת"ל כך ש $span(B) = V$ נקראת בסיס.
הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}} V = |B|$ כאשר B בסיס. V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}} V < \infty$
משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב כלומר לכל שתי בסיסים B, B' הגדלים שלהם שווים. $|B| = |B'|$.

משפט: יהיה $B \subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. Bבסיס
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית
3. B קבוצה פורשת את V־ מינימאלית.

תרגיל: יהיה $V = \mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. מצא $dim_{\mathbb{F}} V$

1. כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
פתרון: קל לראות כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$קבוצה פורשת ובת"ל ולכן בסיס. $dim_{\mathbb{F}} V = 2$

2. כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
פתרון: במקרה זה צריך יותר וקטורים לבסיס כי יש פחות סקלארים להשתמש בהם.
טענה: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ בסיס.
הוכחה: B פורשת: יהיה $\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \in V$ אזי

$.\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

B בת"ל. נניח $\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 i \\ \alpha_3+\alpha_4 i \end{pmatrix} \Leftarrow \alpha_i = 0.$

דוגמאות לבסיסים סטנדרטים:

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. בסיס $B=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

2. $V=\mathbb{C}^{3\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$בסיס

$$B=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$. בסיס $B=\{1,x,x^2\}$

4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ בסיס $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\ldots\}$ בסיס אינסופי.

משפט השלישי חינם

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n $(dim_{\mathbb{F}}V=n)$. תהא קבוצה $B\subset V$ אם Bמקיימת 2 מתוך 3 התנאים הבאים אזי היא מקיימת גם את השלישי (ובפרט Bתהיה בסיס).

1. $\#B=n$
2. B פורשת את V
3. B בת"ל

דוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $B=\{v_1,v_2\}$כך ש $v_i\neq 0$ ו $v_1\neq \alpha v_2$ (כלומר v_1 אינו פרופורציונאלי ל v_2) אזי B בסיס ל V.

הוכחה: ראינו כי המימד של המרחב שווה 2. מהנתון נובע כי B בת"ל ובנוסף $\#B=2$ לכן ממשפט השלישי חינם Bבסיס.

דוגמא פרטית $B=\{\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix}\}$ בסיס.

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. השלם את

$S=\{v_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ לבסיס.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V=4$ (קל לראות שקיים בסיס סתנדרטי מגודל 4) ראינו כי S בת"ל ולכן מספיק למצוא וקטור $v\notin span(S)$ ואז $S\cup\{v\}$ קבוצה בת"ל (לפי אחד התרגילים שעשינו) מגודל 4 ולכן בסיס.

ראינו כי $span(S)=\{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$ ולכן $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\notin span(S).$

תרגיל: $V=\mathbb{C}_2[x]$ מעל $\mathbb{C}$. $B=\{v_1=1+x, v_2=1+ix, v_3=ix, v_4=ix^2\}$ מצא $B^{'}\subset B$ כך ש $B^{'}$בסיס ל V.

פתרון: $dim_{\mathbb{F}}V = 3$ מספיק למצוא 3 וקטורים ב B שהם בת"ל. נבדוק באופן כללי האם הווקטורים בת"ל.

שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון לא טרויאלי:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, כלמור הוקטורים ת"ל והפתרונות הם מהצורה: $\alpha_4 = 0,\ \alpha_3 = t,\ \alpha_2 = \frac{-it}{i-1},\ \alpha_1 = -\alpha_2$. רואים שהוקטורים v_1, v_2, v_3 ת"ל אחד בשני לכן נוכל להשמיט אחד מהוקטורים התלויים לינארית ונבדוק האם יש עדיין תלות:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ רואיסם שאין תלות, לכן:

כלומר $B^{'} = \{1+x, 1+ix, ix^2\}$ קבוצה בת"ל ולכן בסיס.

הערות כלליות:

1. לכל קבוצה $B \subset V$ שפורשת את Vניתן למצוא $B^{'} \subset B$ כך ש $B^{'}$ בסיס (לצמצם את B לבסיס)

2. לכל קבוצה $B \subset V$ בת"ל ניתן למצוא $B \subset B^{'}$ כך ש $B^{'}$ בסיס (להרחיב את Bלבסיס)

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subset V$ תת מרחב מאותו מימד $(dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n)$. הוכח: $W = V$.

הוכחה: נבחר $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ בסיס ל W. בפרט $span(B) = W$ ו Bקבוצה בת"ל. כיוון ש Bעם n איברים אזי לפי השלישי חינם $span(B) = V$.$\blacksquare$

תרגיל: היה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ בסיס.
אזי כל וקטור $v \in V$. ניתן להצגה יחידה באיברי בסיס B.

פתרון: כיוון ש $span(B) = V$ ניתן לכתוב $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = v$ נניח כי ניתן להציג את v גם כ $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$אזי $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ כלומר $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$
כיוון ש B בת"ל לכל i $\alpha_i - \beta_i = 0$ כלומר לכל i $\alpha_i = \beta_i$ $\blacksquare$

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$. אזי $A+B := \{a+b \,|\, a \in A, b \in B\}$

תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$.
הוכח $span(A \cup B) = span(A) + span(B)$
הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $x \in span(A) + span(B)$ אזי $x = x_A + x_B$
כאשר $x_A \in span(A), x_B \in span(B)$.

לפי הגדרה $x_B = \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i b_i$, $x_A = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i a_i$ כאשר α_i, β_i סקלארים ו $a_i \in A, b_i \in B$.

לכן $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i b_i$ כלומר צ"ל של איברים מ $A \cup B$ ולכן $x \in span(A \cup B)$.

$(\subseteq)$ יהא $x \in span(A \cup B)$ אזי $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ כאשר $v_i \in A \cup B$. כלומר
לכל i מתקיים $v_i \in A$ או $v_i \in B$
נסדר ע"י החלפת אינדקסים את כל $v_i \in A$ בהתחלה (נניח $1 \leq i \leq l$)
ואת כל ה $v_i \in B$ בסוף (נניח $l+1 \leq i \leq n$)
ואז $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i + \sum_{i=l+1}^{n} \alpha_i v_i \in span(A) + span(B)$ ■.