פונקציות אינטגרביליות

משפט לבג (חלק שני)

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ורציפה כמעט בכל הקטע.

אזי, f אינטגרבילית בקטע.

משפט לבג (חלק ראשון) נותן את החלק ההפוך.

הוכחה

תהי D קבוצת נקודות אי הרציפות של f בקטע $[a,b]$.

יהי $0<\varepsilon$.

D קבוצה אפסית, לכן קיים כיסוי פתוח:

$$D \subseteq \bigcup_n I_n$$

ע"י קטעים פתוחים I_n שסכום אורכיהם קטן מ - ε.

לכל $c\in[a,b]\backslash D$, כיוון ש $f-$ רציפה ב - c, קיימת סביבה $(c-\delta,c+\delta)$ של c, בה לכל $a\le x\le b$ מתקיים: $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$. ניקח: $J_c := \left(c-\frac{\delta}{2},c+\frac{\delta}{2}\right)$.

עפ"י הגדרת I_n,J_c:

$$[a,b]\subseteq \bigcup_n I_n \cup \bigcup_{c\in[a,b]\backslash D} J_c$$

זהו כיסוי פתוח של קטע סגור, לכן עפ"י משפט היינה בורל, קיים לו תת כיסוי סופי.

תהי P קבוצת קצוות הקטעים בתת הכיסוי הסופי הנ"ל, לא כולל קצוות שאינם בקטע $[a,b]$, כולל את הנקודות $[a,b]$.

נסמן: $P: a=x_0<\cdots<x_k<b$.

כל קטע (x_{i-1},x_i) מוכל באחד הקטעים I_n או אחד הקטעים J_c בתת הכיסוי (**תרגיל!**).

תהי $F:=\{i\in\{1,\cdots,k\}: (x_{i-1},x_i)\}$ מוכל באחד הקטעים I_n של תת הכיסוי.

נחשב:

$$\bar{s}(P)-\underline{s}(P)=\sum_{i\in F}\Delta_i\cdot\omega_i+\sum_{i\notin F}\Delta_i\cdot\omega_i$$

אם $i\notin F$, קיימת נקודה $c\notin D$ כך ש: $(x_{i-1},x_i)\subseteq J_c$, לכן לכל $x,y\in[x_{i-1},x_i]$ מתקיים:

$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon\,,|f(y)-f(c)|<\varepsilon\Longrightarrow|f(y)-f(x)|<2\cdot\varepsilon\ \Longrightarrow\omega\le 2\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{s}(P)-\underline{s}(P)\le\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\cdot\omega+\sum_{i=1}^{k}\Delta_i\cdot 2\cdot\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{s}(P)-\underline{s}(P)<\omega\cdot\varepsilon+2\cdot\varepsilon\cdot(b-a)=\overbrace{\big(\omega+2\cdot(b-a)\big)}^{\text{קבוע}}\cdot\varepsilon$$

לכן, מתקיים קריטריון רימן לאינטגרביליות, לכן הפונקציה אינטגרבילית.

$$\blacksquare$$

מסקנה

כל פונקציה חסומה בקטע סגור עם מספר סופי או בן מניה של נקודות אי רציפות, היא אינטגרבילית בקטע.

דוגמאות

1. פונקציה רציפה בקטע סגור (לפונקציה רציפה אין נקודות אי רציפות).
2. פונקציה מונוטונית בקטע סגור (לפונקציה מונוטונית יש לכל היותר $\aleph_0$ נקודות אי רציפות).

דוגמה

$$f(x)\coloneqq\begin{cases}\sin\frac{1}{x}\,, & x>0\\ 0\,, & x=0\end{cases}\,,x\in[0,1]$$

$f(x)$ חסומה בקטע ויש לה רק נקודת אי רציפות אחת (ב - $x=0$), לכן עפ״י משפט לבג (חלק שני), האינטגרל המסוים:

$$\int_0^1 f(x)dx$$

קיים.

אולם, הפונקציה אינה רציפה במידה שווה באף קטע $[0,\delta]$.

$\blacksquare$

דוגמה

פונקציית הפופקורן חסומה ורציפה ב - $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, לכן, האינטגרל המסוים:

$$\int_0^1 pop(x)dx$$

קיים.

למה

1. אם $f(x)=0$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=0$$

2. אם $f(x)=g(x)$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרביליות שם, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

הוכחה

1. תהי P_n סדרת חלוקות של הקטע $[a,b]$ עם $\lambda(P_n)\to 0$.
בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ של כל חלוקה, נבחר נקודה d_i כך ש: $f(d_i)=0$.
[נניח בשלילה שלא קיימת נקודה כנ"ל. אזי: $[x_{i-1},x_i]\subseteq D:=\{x\in[a,b]:f(x)\neq 0\}$ קבוצה אפסית, אולם לא ניתן לכסות את $[x_{i-1},x_i]$ בעזרת קטעים פתוחים שסכום אורכיהם קטן מ - x_i-x_{i-1} (קל לראות בעזרת מעבר לתת כיסוי סופי ע"י היינה בורל)].
לכן:

$$\sigma(P_n)=\sum_i \Delta_i\cdot f(d_i)=0$$

לכן, משום ש $-f$ אינטגרבילית ו - $\lambda(P_n)\to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx=0$$

2. הפונקציה $f-g$ אינטגרבילית, כצירוף לינארי של פונקציות אינטגרביליות.

עפ״י ההנחה $f-g=0$ כמעט בכל הקטע.

עפ״י סעיף 1:

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx=0$$

לכן:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

■

דוגמה

$pop(x)=0$ כמעט בכל הקטע $[0,1]$ ואינטגרבילית בקטע (ראינו), לכן עפ״י הלמה:

$$\int_0^1 pop(x)dx=0$$

דוגמה

ייתכן כי $f(x)=0$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$, ועדיין:

$$\int_a^b f(x)dx\neq 0$$

ולמעשה, אפילו לא קיים (זו האפשרות היחידה לכך, לאור הלמה הנ״ל).

הפונקציה של דיריכלה:

$$f(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases},x\in[0,1]$$

אינה אינטגרבילית (ראינו, וגם נובע מכך שאינה רציפה באף נקודה).

ייתכן אפוא (מהדוגמה הנ״ל), ש - $f(x)=g(x)$ בכל $x\in[a,b]$ פרט לקבוצה בת מניה ו - $g(x)$ רציפה, ועדיין f אינה אינטגרבילית בקטע.

למה

תהי g פונקציה רציפה (או אפילו אינטגרבילית) בקטע $[a,b]$.

אם $f(x)=g(x)$ פרט למספר סופי של נקודות בקטע, אז:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

הוכחה

<u>f חסומה</u>

g חסומה בקטע.

$f(x)\neq g(x)$ במספר סופי של נקודות, נסמנן: $c_1,\cdots,c_m$.

לכל $x\in[a,b]$:

$$f(x)\leq \max\left\{f(c_1),\cdots,f(c_m),\sup_{y\in[a,b]} g(y)\right\}$$

ובדומה עבור חסם תחתון.

לכן, f חסומה בקטע.

<u>f רציפה כמעט בכל הקטע</u>

g רציפה כמעט בכל הקטע עפ"י משפט לבג (חלק ראשון).

תהי D קבוצת נקודות אי הרציפות של g.

הקבוצה $D\cup\{c_1,\cdots,c_m\}$ אפסית (איחוד של קבוצות אפסיות).

נראה ש – f רציפה בכל נקודה $c\notin D\cup\{c_1,\cdots,c_m\}$.

יהי $0<\varepsilon$.

$c\notin D$, לכן, קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-c|<\delta$, מתקיים: $|g(x)-g(c)|<\varepsilon$.

$c\notin\{c_1,\cdots,c_m\}$. נגדיר: $\tilde{\delta}\coloneqq\min\{|c-c_1|,\cdots,|c-c_m|\}$.

יהי $\tilde{\tilde{\delta}}\coloneqq\min\{\delta,\tilde{\delta}\}$.

כעת, לכל $|x-c|<\tilde{\tilde{\delta}}$, אז: $f(x)=g(x)$, ולכן: $|f(x)-f(c)|=|g(x)-g(c)|<\varepsilon$.

עפ"י משפט לבג (חלק שני), f אינטגרבילית בקטע.

לכן, f,g אינטגרביליות ושוות כמעט בכל הקטע. עפ"י למה קודמת:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

$\blacksquare$

למה

אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

1. הפונקציה $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע.
2. אם קיים $c>0$ כך ש: $|g(x)|\geq c$ לכל $x\in[a,b]$, אז: $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית בקטע.

הוכחה

יהיו D_f, D_g קבוצת נקודות אי הרציפות של f,g בהתאמה.

1. עפ"י משפט לבג (חלק ראשון), f,g חסומות, ולכן גם $f\cdot g$ חסומה.
   נימוק:
   $$|f(x)|\leq M_f\ ,|g(x)|\leq M_g \Longrightarrow |f\cdot g(x)|<M_f\cdot M_g$$
   הפונקציה $f\cdot g$ רציפה בכל $x\notin \overbrace{D_f\cup D_g}^{\text{אפסית}}$, לכן רציפה כמעט בכל הקטע.
   עפ"י משפט לבג (חלק שני), $f\cdot g$ אינטגרבילית בקטע.
2. לכל $x\in[a,b]$:
   $$\left|\frac{1}{g(x)}\right| = \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{c}$$
   לכן, $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית בקטע (עפ"י משפט לבג [חלק שני]). נפעיל את סעיף 1.

$\blacksquare$