פתרון תרגיל 5

1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת חבורה $H \le G$. תארו את אוסף המחלקות השמאליות של H ב- G:

א. $G = 4Z$, $H = 12Z$.
ב. $G = U_{20}$, $H = \langle 11 \rangle$.
ג. $G = (R^*, \cdot)$, $H = R^+ = \{x \in R^* / x > 0\}$.
ד. $G = G_1 \times G_2$, $H = \{e_1\} \times G_2$.
כאשר G_1 ו- G_2 חבורות. e_1 הוא איבר היחידה של G_1.
ה. $G = R^2$, $H = \{(t, 3t) / t \in R\}$.

פתרון:

א. הקוסטים הם:

$$H$$
$$4 + H = \{\ldots -20, -8, 4, 16, 28, 52 \ldots\}$$
$$8 + H = \{\ldots -16, 4, 8, 20, 32, 56 \ldots\}$$

ב. נשים לב שיש סה"כ 8 איברים ב- $U_{20} = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$.
כמו כן, $H = \{1,11\}$. הקוסטים הם:

$$H$$
$$3H = \{3,13\}$$
$$7H = \{7,17\}$$
$$9H = \{9,19\}$$

ג. אם $a \in R^+$ אזי $aR^+ = R^+$. אחרת $a < 0$ נקבל $aR^+ = \{ax : x > 0\} = R^-$. לכן יש בסה"כ שתי מחלקות.

ד. המחלקות הן מהצורה $(g_1, g_2)(\{e_1\} \times G_2)$. אפשר לראות כי קבוצת המחלקות היא בהתאמה חח"ע ועל לאיברי G_1 לפי:

$$(g_1, g_2)(\{e_1\} \times G_2) = \{(g_1, k) : k \in G_2\} \leftrightarrow g_1 \in G_1.$$

ה. הקוסטים הם:

$$\{(a,b) + (t,3t) : (a,b) \in R^2\} = \{(a+t, b+3t) : a,b \in R\} = \{(x,y) : y = 3x + b - 3a, a,b \in R\}$$

כלומר, אלה הם הישרים עם שיפוע 3.

2. מצאו את האינדקסים הבאים:

א. $[U_{14} : \langle 11 \rangle]$.
ב. $[Z_8 \times Z_8 : \langle (2,2) \rangle]$.

פתרון:

א. לפי משפט לגרנז' $\left[U_{14}:\langle 11\rangle\right]=\frac{|U_{14}|}{|\langle 11\rangle|}$. $|U_{14}|=\varphi(14)=14\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=6$.

$\langle 11\rangle=\{1,9,11\}$ לכן, $|\langle 11\rangle|=3$. נקבל $\left[U_{14}:\langle 11\rangle\right]=\frac{|U_{14}|}{|\langle 11\rangle|}=\frac{6}{3}=2$.

ב. לפי משפט לגרנז' $\left[Z_8\times Z_8:\langle(2,2)\rangle\right]=\frac{|Z_8\times Z_8|}{|\langle(2,2)\rangle|}$.

$|Z_8\times Z_8|=64$. $\langle(2,2)\rangle=\{(0,0),(2,2),(4,4),(6,6)\}$ לכן, $|\langle(2,2)\rangle|=4$.

מכאן ש- $\left[Z_8\times Z_8:\langle(2,2)\rangle\right]=\frac{|Z_8\times Z_8|}{|\langle(2,2)\rangle|}=\frac{64}{4}=16$.

3. תהי G חבורה ותהיינה $K\le H\le G$ תתי-חבורות.
הוכיחו: $[G:K]=[G:H]\cdot[H:K]$.

פתרון: יש להפעיל את משפט לגרנז' 3 פעמים. $[G:K]|K|=|G|$ ו- $[G:H]|H|=|G|$ ולכן $[G:K]|K|=[G:H]|H|$. בפעם השלישית נקבל $[H:K]|K|=|H|$. נציב במשוואה הקודמת ונקבל $[G:K]|K|=[G:H][H:K]|K|$. מכאן $[G:K]=[G:H][H:K]$.

4. תהי G חבורה ו- $H_1,H_2\le G$ תתי-חבורות הוכיחו או הפריכו: $[G:H_1]=[G:H_2]$.

פתרון: הפרכה. נבחר $G=Z$. $H_1=3Z$, $H_2=5Z$. ברור ש- $H_1\cong H_2$. עם זאת $[G:H_2]=5$ ו-3 $[G:H_1]=$. המקיימות $H_1\cong H_2$.

5. בסעיפים הבאים נתון איבר ב- Z_n. קבעו האם קיים לו הופכי. במידה וכן מצאו אותו, במידה ולא נמקו:

א. 23 ב- Z_{100}.
ב. 10 ב- Z_{50}.
ג. 26 ב- Z_{45}.

פתרון:

א. כן, 100 ו-23 זרים. נחשב $(100,23)$.

$$100=4\cdot 23+8$$
$$23=2\cdot 8+7$$
$$8=1\cdot 7+1$$

בהצבה אחורה נקבל $1=3\cdot 100-13\cdot 23$ לכן, $23^{-1}=-13\equiv 87 (\mathrm{mod}\,100)$.

ב. לא. 10 ו-50 אינם זרים.

ג. כן. 26 ו- 45 זרים. נחשב $(45,26)$.

$$45 = 26 + 19$$
$$26 = 19 + 7$$
$$19 = 2 \cdot 7 + 5$$
$$7 = 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

בהצבה אחורה נקבל $1 = -19 \cdot 26 + 11 \cdot 45$ לכן, $26^{-1} = -19 \equiv 26 (\mathrm{mod}\, 45)$.