פתרון תרגיל 5 אינפי 4

29 באפריל 2015

1. שני המשטחים היוצרים את הגוף הם שני חרוטים, כאשר $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ הוא החרוט התחתון ו־$z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ הוא החרוט העליון.

נחשב את השטח של כל אחד מהחרוטים בתחום המתאים ונסכם את התוצאות.

החרוט התחתון ניתן להטלה על מישור xy, כלומר הפרמטריזציה שלו היא: $\phi(x,y) = (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$, ואלמנט השטח הוא:

$$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{5}$$

כאשר הפונקציה היא $z = f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$. לכן, שטח החרוט התחתון יהיה:

$$\iint \sqrt{5}dxdy$$

מהו התחום שלנו? החרוטים נפגשים כאשר $z = 2$, כלומר כאשר $\sqrt{x^2+y^2} = 1$. לכן, אם נעבור לקואורדינטות קוטביות (ואז $r = \sqrt{x^2+y^2}$) נקבל שהתחום הוא $0 \le r \le 1$.

הזווית θ כמובן נמצאת בתחום $[0, 2\pi]$, ובל נשכח את היעקוביאן ־ r. בסך הכל השטח יהיה:

$$\iint \sqrt{5}dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{5} r d\theta dr = \sqrt{5}\pi$$

כעת נחשב את שטחו של החרוט השני. גם הוא ניתן להטלה על מישור xy כאשר $z=f(x,y)=3-\sqrt{x^2+y^2}$. אלמנט השטח יהיה:

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

ושוב, השטח יהיה:

$$\iint \sqrt{2}dxdy$$

התחום שלנו שונה עכשיו. החיתוך של החרוט שלנו עם ציר ה־z הוא בנקודה $(3,0,0)$, כלומר $2\le z\le 3$, אך אם נעבור לקואורדינטות קוטביות נקבל שוב:

$$0\le r\le 1, 0\le \theta\le 2\pi$$

והשטח יהיה:

$$\iint \sqrt{2}dxd=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}rd\theta dr=\sqrt{2}\pi$$

והשטח של כל הגוף הוא $(\sqrt{2}+\sqrt{5})\pi$.

2. הפרמטריזציה שלנו היא:

$$F(r,\phi)=(r\cos\phi, r\sin\phi,\phi)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$F_r=(\cos\phi,\sin\phi,0)$$

$$F_\phi=(-r\sin\phi, r\cos\phi,1)$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$F_\phi \times F_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin\phi & r\cos\phi & 1 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{vmatrix} = (-\sin\phi, -\cos\phi, -r)$$

ולכן השטח שלנו הוא ($r \in [0,1], \phi \in [0, 2\pi]$):

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|F_\phi \times F_r\| \, d\phi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi + r^2} d\phi dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}(r\sqrt{1+r^2} + \ln(r + \sqrt{1+r^2}))|_0^1 = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$$

האינטגרל לפי r טריוויאלי.

3. הפרמטריזציה שלנו היא:

$$F(u,v) = (u+v, u-v, uv)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$F_u = (1, 1, v)$$

$$F_v = (1, -1, u)$$

ולכן אלמנט השטח הוא:

$$F_u \times F_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = (v+u, v-u, -2)$$

והשטח שלנו יהיה:

$$V=\iint\|(v+u,v-u,-2)\|\,dudv=\iint\sqrt{2u^2+2v^2+4}dudv=$$

התחום שלנו הוא $u^2+v^2\leq 1$. אם נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$$

נקבל שהתחום הוא $0\leq r\leq 1, 0\leq\theta 2\pi$ והיעקוביאן הוא r, ולכן:

$$V=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+2}rd\theta dr=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot(\frac{2}{3}(r^2+2)^{\frac{3}{2}})|_0^1=\frac{\pi}{3}(6^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}})$$