תרגול השלמה

25 ביוני 2015

תרגיל:

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ בתחום ההתכנסות.

פתרון:

נמצא קודם את רדיוס ההתכנסות ρ בעזרת נוסחת קושי־הדמר

האיבר הכללי הוא $a_n=\begin{cases}a_{2n}=0\\ a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}\end{cases}$

$$\rho=\frac{1}{\overline{lim}_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n-1}}}=\Longleftarrow\overline{lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mid a_n\mid}=\overline{lim}_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2n-1}}=lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$
1

עבור $x=\pm1$ נקבל שהטור מתבדר ולכן ההתכנסות ב־ $(-1,1)$ אינה במ"ש.

אנחנו רוצים לחשב את $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$, בתוך תחום ההתכנסות ניתן לגזור את הטור איבר איבר ולכן:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$$

קיבלנו טור הנדסי שאת הסכום שלו אנחנו יודעים לחשב

ואז $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ומכאן אפשר למצוא את $S(x)$:

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]dt=$$
$$\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)|_0^x=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

תרגיל :

חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

פתרון:

טור שבשאלה התקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ ואחר שהצבנו בו את $x=\frac{1}{2}$, נבדור האם $x=\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות:

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n^2}=\overline{lim}_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow\rho=1$$

בקצוות הטור אינו מתכנס ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$. נסמן ב־ $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^2$, יש לנו התכנסות במ"ש של הטור ל־$S(x)$ בכל תת קטע סגור שמוכל בתחום ההתכנסותולכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר־איבר: $S(x)=x\sum_{n\to\infty}^{\infty}n^2x^{n-1}$, נסמן $G(x)=\sum_{n\to1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ ואז:

$$\int_0^x G(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{x^n}{n}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

ואם נגדיר $H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, נבצע שוב אינטגרציה ונקבל:

$$\int_0^x H(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$$

נמצא את $H\left(x\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

ועכשיו ניתן למצוא את $G\left(x\right)$: $G\left(x\right)=\left(xH\left(x\right)\right)'=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{(1-x)^2-2x(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{1-x^2}{(1-x)^4}$

ומכאן $S\left(x\right)=xG\left(x\right)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ ולאחר הצבת $x=\frac{1}{2}$ ב־S ובטור עצמו נקבל את הדרוש.

פיתוח של פונקציה לטור חזקות

ידוע כי $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ עבור $1>|x|$ ומכאן למשל: אם נציב $x=-t^2$ ונקבל: $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n t^{2n}$

הטור מתכנס כאשר $1>|t|$ מותר לעשות אינטגרציה איבר־איבר ונקבל:
$arctan\left(x\right)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(-1\right)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ כעט יש לנו התכנסות של הטור שקיבלנו ב $x=1$ לפי לייבניץ

ואז $\frac{\pi}{4}=lim_{x\to1^-}\left(arctan\left(x\right)\right)=lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ וקיבלנו את סכום הטור.

טורי פורייה

הגדרה:

יהי Vמרחב מכפלה פנימית, ונניח ש־ $dim\left(V\right)=\infty$ ותהי $\{e_1,e_2,.....\}$מערכת אורתונורמלית אינסופית בתוכו. (כאשר לדובר על מערכת נורמלית במרחב ממימד אינסופי, לא נתייחס אלי כאל בסיס למרחב, אלא פשוט כאל מערכת שוקטורים שלה אורתוגונאלים זה לזה, והנורמה של כל אחד מהם היא 1).

הגדרה:

תהי $\{e_1,e_2,.....\}$ מערכת אורטונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V, אם $lim_{m\to\infty}\|u-\sum_{n=1}^{m}\langle u,e_n\rangle e_n\|=0$ לכל $u\in V$.

הערה:

אם $\{e_n\}$ היא מערכת אורטונורמלית סגורה אזי ניתן להציג כל $f\in V$ ע"י צירוף לינארי אינסופי שצורתו הכללית היא $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n$ $(*)$.

הגדרות:

1) נסמן ב־E את מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין המוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ ומקבלות ערכים ב־$\mathbb{C}$.

2) לכל $f,g\in E$ נגדיר$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}$ זוהי מכפלה פנימית (הוכיחו) ב־E לכן E הוא מרחב מכפלה פנימית.

משפט:

סדרת הפונקציות $\left\{\frac{1}{2},sin\left(x\right),cos\left(x\right),sin\left(2x\right),cos\left(2x\right),....\right\}$ מהווה מערכת אוטונורמלית סגורה במרחב E.

איברי הטור $(*)$ במקרה של המערכת שלנו הם: $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(nx\right)+b_n sin\left(nx\right)\right]$

כאשר $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)cos\left(nx\right)dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)sin\left(nx\right)dx$ $(**)$

הגדרה:

תהי $f\in E$ פונקציה נתונה, הטור המתאים ל־f, כאשר ה־ a_n וה־ b_n הם כמו שהגדרנו אותם ב־(**) נקרא טור פורייה של f ונסמן אותו ע"י:

$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(nx\right)+b_n sin\left(nx\right)\right]$

הערות:

1) בהגדרת טור פורייה של f רשמנו ~ולא שוויון מדוייק מאחר ואין שום הכרח שהטור יתכנס לכל ערך של x. נדרשים תנאים יותר חזקים על מנת להבטיח את התכנסות הטור לערכים רצויים.

דוגמא:

תהי $f\left(x\right)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ברור כי fנמצאת ב־E. נפתח את הטור פורייה שלה:

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0$

עבור $n\geq 1$: $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xcos\left(nx\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{xsin(nx)}{n}\mid_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(nx)}{n}dx\right]=$ $0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{xsin(nx)}{n}\mid_{-\pi}^{\pi}+\frac{cos(nx)}{n^2}\mid_{-\pi}^{\pi}\right]$ (ברור ש־$xcos(nx)$ פונקציה רי זוגית והקטע $[-\pi,\pi]$ הוא קטע סימטרי ולכן אפשר היה להסיק ישר ש $a_n=0$).

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xsin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi cos(n\pi)}{n\pi}\mid_{-\pi}^{\pi}+\frac{sin(nx)}{n^2}\mid_{-\pi}^{\pi}\right]=-\frac{2\pi cos(n\pi)}{n\pi}=$ $\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ לכן טור פורייה של $f\left(x\right)=x$ נתון ע"י

$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}sin(nx)}{n}$, ניתן לראות שבקצות הקטע $x=\pm\pi$ הטור מתאפס ואילו הפונקציה עצמה אינה מתאפסת בנקודות אלה, רבל הטור מתכנס לפונקציה בכל $x\in(-\pi,\pi)$.

דוגמא:

תהי $f(x)=\mid x\mid$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ברור ש־$f\in E$, נחשב את הטור פורייה של f:

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mid x\mid dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$

עבור $n\geq 1$נקבל: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mid x\mid cos\left(nx\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xcos\left(nx\right)dx=-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$ -

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{cos(nx)}{n^2}\mid_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

$b_n=0$ משום ש־ $\mid x\mid sin\left(nx\right)$ פונקציה אי זוגית ו־$(-\pi,\pi)$ הוא קטע סימטרי.

וקיבלנו ש: $\mid x\mid\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}cos\left(2k-1\right)x$.

דוגמא:

טור פורייה של $f\left(x\right)=5-3sin\left(2x\right)+8cos\left(3x\right)$ זהה ל־f עצמה.

באופן כללי, כל פונקציה מהצורה $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n cos\left(nx\right)+\sum_{n=1}^{m}b_n sin\left(nx\right)$ כאשר m הוא מספר טבעי ו־a_m או b_m שונים מאפס, נקראת פולינום טריגונומטרי ממעלה m. לגבי כל פונקציה כזו, טור פורייה שלה זהה לה.

התכנסות נקודתית ומשפט דיריכלה

למרות הסגירות של המערכת האורטונורמלית הטריגונומטרית, אין בהכרח התבנסות נקודתית. נציג תנאים המבטיחים שהטור פורייה של f יתכנס נקודתית ל־f, כלומר שבכל נקודה $x\in[-\pi,\pi]$ יתקיים: $f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(nx\right)+b_n sin\left(nx\right)\right]$.

הגדרה:

נגדיר את E' להיות מרחב כל הפונקציות $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ המקיימות את התנאים הבאים:

1) $f\in E$
2) לכל $x\in[-\pi,\pi)$ הגבול הבא קיים וסופי: $lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}$
3) לכל $x\in(-\pi,\pi]$ הגבול הבא קיים וסופי: $lim_{h\to 0}\frac{f(x-)-f(x-h)}{h}$

הביטויים $f(x-),f(x+)$ מציינים את הגבול השמאלי והגבול הימני של f בנקודה x בהתאמה.

משפט דיריכלה:

תהי $f\in E'$, אזי לכל $x\in(-\pi,\pi)$, הטור פורייה של f מתכנס לערך $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, ובקצוות הקטע $x=\pm\pi$ הטור מתכנס לערך $\frac{f(\pi-)+f((-\pi)+)}{2}$.

הערה:

אם f רציפה בנקודה x אז $f(x-)=f(x+)$ ולכן $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}=f(x)$ והטור פורייה של f יתכנס לערך $f(x)$ בנקודה זו.

ואם בנוסף לתנאי המשפט f רציפה בכל הקטע $[-\pi,\pi]$ ומקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ אז הטור פורייה של f יתכנס בכל נקודה $x\in[-\pi,\pi]$ ל$f(x)$.

התכנסות במ"ש

משפט:

אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ומתקיים עבורה: $f(\pi)=f(-\pi)$ וגם $f'\in E$ אזי הטור פורייה של f מתכנס במ"ש ל־f על כל הקטע.

משפט:

אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'\in E$ (או במילים אחרות אם הטור פורייה של f מתכנס במ"ש ל־f על כל הקטע) אזי ניתן לגזור את הטור פורייה של f איבר־איבר ולקבל: $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n sin(nx)+nb_n cos(nx)\right]$.

משפט:

תהי $f\in E$ עם טור פורייה: כ$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos(nx)+b_n sin(nx)\right]$ אזי לכל $x\in[-\pi,\pi]$

$\int_{-\pi}^{x}f(t)dt=\frac{a_0(x+\pi)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}sin(nx)-\frac{b_n}{n}(cos(nx)-cos(n\pi)\right]$ והטור באגף משאל מתכנס לפטנקציה באגף ימין.

הערה:

קיימת בעייה לגבי האיבר חופשי $\frac{a_0}{2}$ אשר האינטגרל שלו הוא $\frac{a_0x}{2}$ שהוא אינו חוקי כאיבר בטור פורייה , לכן תוצאת האינטגרציה איבר־איבר לא תתן בדרך כלל טור פורייה.