מערך תרגול 7

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

1 מקדמי Γ_{ij}^k

תזכורת 1

א. הוקטורים $\{x_1, x_2, n\}$ מהווים בסיס של $\mathbb{R}^3$, לכן נוכל להגדיר מקדמי Γ_{ij}^k ע"י

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + L_{ij} n$$

מקדמי גמא הם סימטריים במובן ש־ $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

ב. ניתן לחשב את Γ_{ij}^k באמצעות הנוסחאות הבאות:

$$\Gamma_{ij}^k = \langle x_{ij}, x_\ell \rangle g^{\ell k}$$
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{i\ell;j} - g_{ij;\ell} + g_{j\ell;i}) g^{\ell k}$$

כאשר $g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$. שימו לב שהנוסחה השניה נותנת אפשרות לחשב את מקדמי גמא באמצעות מקדמי המטריקה בלבד, גם אם לא נתונה פרמטריזציה.

ג. עבור משטח סיבוב $x(\theta, \phi) = (r(\phi)cos\theta, r(\phi)sin\theta, z(\phi))$ מקבלים

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi}$$

שימו לב 1 כאשר (g_{ij}) אלכסונית גם (g^{ij}) אלכסונית כלומר $g^{12} = 0$. לכן נקבל נוסחא פשוטה יותר

$$\Gamma_{ij}^\kappa = \frac{1}{2}(g_{i\kappa;j} - g_{ij;\kappa} + g_{j\kappa;i}) g^{\kappa\kappa}$$

באשר אנחנו נזהרים לרשום קו תחתון מתחת ל־k כיוון שלא סוכמים עליו למרות שהוא מופיע גם למעלה וגם למטה.

תרגיל 1 מיצאו את מקדמי גמא עבור הפרמטריזציה $x(u^1,u^2)=(u^1,u^1+u^2,0)$,

א. לפי הגדרה.

ב. באמצעות הנוסחא $\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}(g_{i\ell;j}-g_{ij;\ell}+g_{j\ell;i})g^{\ell k}$.

פתרון 1

א.

$$x_1=(1,1,0)$$
$$x_2=(0,1,0)$$

כלומר $x_{11}=\vec{0}$ ולכן $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=0$.

באותו האופן $x_{12}=x_{22}=\vec{0}$ לכן

$$\Gamma_{22}^1=\Gamma_{22}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{12}^2=0$$

לסיכום $\Gamma_{ij}^k=0$ לכל i,j,k.

ב. נחשב את המטריקה

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle\\ \langle x_1,x_2\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

נשתמש בנוסחא השניה. נמצא את $\Gamma_{11}^1,\Gamma_{11}^2$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^k&=\frac{1}{2}(g_{1\ell;1}-g_{11;\ell}+g_{1\ell;1})g^{\ell k}\\&=\underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;1}}^{0}-\overbrace{g_{11;1}}^{0}+\overbrace{g_{11;1}}^{0})g^{1k}}_{\ell=1}+\underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{g_{12;1}}^{0}-\overbrace{g_{11;2}}^{0}+\overbrace{g_{12;1}}^{0})g^{2k}}_{\ell=2}=0\end{aligned}$$

כל מקדמי המטריקה קבועים כלומר $g_{ij;k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=0$ לכל i,j,k. כלומר

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=0$$

ברור כי באותו אופן נקבל $\Gamma_{ij}^k=0$ לכל i,j,k.

תרגיל 2 מיצאו את מקדמי גמא של הפרמטריזציה של ספירת היחידה

$$x(\theta,\phi)=(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi)$$

פתרון 2 ראשית נחשב את המטריקה:

$$x_\theta = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$$

כלומר

$$(g_{ij}(\theta,\phi)) = \begin{pmatrix} \sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן ההפכית:

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} sin^{-2}\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כהכנה לקראת שימוש בנוסחה, ראשית נמצא את $g_{ij;k}$:

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} \sin(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לסיכום: קיבלנו $g_{11;2} = \sin(2\phi)$ ו־ $g_{ij;k} = 0$ לכל i,j,k אחרים.
המטריקה אלכסונית, לכן נשתמש בנוסחא הפשוטה יותר $\Gamma^\kappa_{ij} = \frac{1}{2}(g_{i\kappa;j} - g_{ij;\kappa} + g_{j\kappa;i})g^{\kappa\kappa}$:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{\sin(2\phi)} + g_{12;1})\overbrace{g^{22}}^{1} = -\sin\phi\cos\phi$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{\sin(2\phi)} - g_{12;1} + g_{21;1})\overbrace{g^{11}}^{\sin^{-2}\phi} = \frac{\sin(2\phi)}{2\sin^2\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \cot\phi$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;1})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

שימו לב שהספירה היא משטח הסיבוב של

$$r(\phi) = \sin\phi$$
$$z(\phi) = \cos\phi$$

ואכן מקדמי גמא מקיימים את הנוסחאות עבור משטח סיבוב:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{22} = 0\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{\sin\phi}\sin'(\phi) = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \cot\phi
\end{aligned}$$

תרגיל 3 בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (u, v)$ מיצאו מקדמי גמא של משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(u,v)) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

פתרון 3 ההפכית של g_{ij}:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} v^{-1} & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}$$

נמצא את $g_{ij;k}$:

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לסיכום קיבלנו: $g_{11;2} = g_{22;2} = 1$ ו־ $g_{ij;k} = 0$ לכל i, j, k אחרים.

המטריקה אלכסונית, לכן נשתמש בנוסחא הפשוטה יותר $\Gamma^\kappa_{ij} = \frac{1}{2}(g_{i\kappa;j} - g_{ij;\kappa} + g_{j\kappa;i})g^{\kappa\kappa}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{1} + g_{12;1})\overbrace{g^{22}}^{v^{-1}} = -\frac{1}{2v}\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{1} - g_{12;1} + g_{21;1})\overbrace{g^{11}}^{v^{-1}} = \frac{1}{2v}\\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;1})g^{11} = 0\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(\overbrace{g_{22;2}}^{1} - \overbrace{g_{22;2}}^{1} + \overbrace{g_{22;2}}^{1})\overbrace{g^{22}}^{v^{-1}} = \frac{1}{2v}
\end{aligned}$$

2 אורך עקומות על משטחים

תזכורת 2

א. תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה מישורית ו־ $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ משטח. אז $\beta = x \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ עקומה מרחבית שנמצאת על המשטח. האורך של $\beta = x \circ \alpha$ נתון ע"י

$$\int_a^b \sqrt{g_{ij}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt$$

ב. בפרט, אם $g_{ij} = \delta_{ij}$ אז אורך כל עקומה מישורית α שווה לאורך העקומה על המשטח $\beta = x \circ \alpha$.

תרגיל 4 הנוסחא $\int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt$ כתובה באמצעות הסכם סכימת איינשטין. כיתבו אותה מפורשות.

פתרון 4

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2}dt
\end{aligned}$$

תרגיל 5 נסתכל על העקומה המישורית $\alpha(t) = (t,t)$ עבור $t \in [0, 2\pi]$, ועל המשטח

$$x(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2)$$

(הליקואיד). חשבו את אורך העקומה $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 5 ראשית נחשב את המטריקה של המשטח:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (\cos u^2, \sin u^2, 0) \\
x_2 &= (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 1) \\
g_{11} &= \langle x_1, x_1 \rangle = 1 \\
g_{12} &= \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \\
g_{22} &= \langle x_2, x_2 \rangle = (u^1)^2 + 1
\end{aligned}$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2+1 \end{pmatrix}$$

ובמשתנה t:

$$(g_{ij}(\alpha(t))) = (g_{ij}(t,t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2+1 \end{pmatrix}$$

כעת, $\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha^1}{dt}, \frac{d\alpha^2}{dt}\right) = (1,1)$ כלומר

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1\cdot 1^2 + 2\cdot 0\cdot 1\cdot 1 + (t^2+1)\cdot 1^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+2} dt \approx 24.43 \end{aligned}$$

תרגיל 6 הראו כי אם $g_{ij} = \mu^2\delta_{ij}$ עבור $0 < \mu \in \mathbb{R}$ אז לכל עקומה $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$L(x\circ\alpha) = \mu L(\alpha)$$

באשר $L(\gamma)$ מספן אורך של עקומה.

פתרון 6

$$\begin{aligned} L(x\circ\alpha) &= \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\alpha^1}{dt}\frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\mu^2\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + \mu^2\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2} dt \\ &= \mu\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2} dt = \mu L(\alpha) \end{aligned}$$