הרצאה IV- מכניקה

נמשיך את ההרצאה הקודמת- נעבור לדון במהירות מואצת, ז"א בעלת תאוצה. נסתכל על מקרה בו $\vec{a} = (0, -a_y)$. בדומה לנפילה חופשית. נפרק את המהירות לצירים, והמשוואות המתקבלות הן: $V_x = V_{0,x}$, $x = x_0 + v_{0,x}(t - t_0)$, $v_y = y_0 - a_y(t - t_0)$, ולכן $y = y_0 + v_{0,y}(t - t_0) - \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$, ולאחר פיתוח נקבל: $t(x) = t_0 + \frac{x - x_0}{v_{0,x}}$. נציב במקוואות קיבלנו ונקבל עבור x ו y כי $y(x) = y_0 + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}(x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0}{v_{0,x}^2}(x - x_0)^2$, נגזור כדי למצוא את מקסימום הגובה של הפונקציה ונקבל: $y'(x) = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} - \frac{a_0}{v_{0,x}^2}(x - x_0) = 0$ ונקבל כי $x_{\text{שיא הגובה}} = x_0 + \frac{v_{0,y}v_{0,x}}{a_0}$. נציב את ערך הx של שיא הגובה בפונקציה *y(x)* ונקבל כי: $y\left(x_{\text{שיא הגובה}}\right) = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0,y}^2}{a_0}$. ברור מהשוואה שפיתחנו שגרף המיקום של y כפונקציה של x יתקבל כפרבולה, כמו שפיתחנו.. כעת נרצה למצוא את בו הגוף יהיה במקסימום הגובה ונקבל $t\left(x_{\text{שיא הגובה}}\right) = t_0 + \frac{v_{0,y}}{a_0}$.

נניח שהוא מתחיל ממיקום אפס, נקבל $y(x) = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0}{v_{0,x}^2}(x)^2$, יש שני פתרונות, האחד הוא *x=0* וזה ברור כי כאשר ירינו את הפגז (או זרקנו כל דבר אחר) מהקרקע, בטוח הוא יהיה בקרקע באותו רגע כי הנחנו שהוא מתחיל מ*(0,0)* . כעת נמצא את הזמן השני: נשווה את הביטוי לאפס, ונקבל כי: $x = \frac{2v_{0,y}v_{0,x}}{a_0}$. אם ברצוני למצוא את מיקום הפגז בכל רגע נתון, נפרק את המהירות התחלתית לצירים ונפעל לכל ציר לחוד- בהתאם לתאוצות הידועות ו/או הנתונות.

כעת נרצה לדעת באיזה זווית יש לזרוק את הכדור על מנת לקבל מרחק מקסימלי בהיתן V_0, נמצא קודם כל את המיקום של y: ע"פ מה שפיתחנו וע"פ פירוק לצירים נקבל $x = \frac{2v_{0,y}v_{0,x}}{a_0} = x = \frac{2v_0 cos\alpha v_0 sin\alpha}{a_0} = \frac{v_0^2}{a_0}sin2\alpha$. ערך האיקס יהיה מקסימלי כאשר הסינוס יהיה שווה ל1, לכן הזווית תהיה 90, ו*α=45*.

<u>כעת נעבור לקואורדינטות פולריות</u>: נניח שקיים וקטור כללי של מיקום שמתואר ע"י הוקטור $\vec{r}(t)$. נפרק זאת לרכיבים ונקבל כי ניתן לבטא את הוקטור כך: $\vec{r}(t) = r(t)cos\theta(t)\hat{x} + r(t)sin\theta(t)\hat{y} = r(t)\hat{r}(t)$.

נשים לב כי: $\hat{r}(t) = \cos[\theta(t)]\,\hat{x} + \sin\,[\theta(t)]\hat{y}$ ז"א שהוקטור $\hat{r}(t)$ תלוי בזמן, להבדיל מוקטורי היחידה הקודמים שלמדנו עליהם.

נגדיר וקטור חדש: $\hat{\theta}$ וקטור גידול הזווית, והוא מאונך לוקטור $\hat{r}(t)$. ניתן לסרטט הכל במערכת צירים ולקבל לאחר פירוק לצירים כי ניתן לבטא את $\hat{\theta}$ כך: $\hat{\theta}(t) = -sin\theta\hat{x} + cos\theta\hat{y}$. עכשיו אנחנו יודעים להגדיר מיקום.

כעת נגדיר מהירות במערת צירים פולרית: $\vec{V} = \dot{\overrightarrow{r(t)}} = \frac{d}{dt}[r\hat{r}] = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. ניתן לראות זעת ע"י גזירה..

*קיימת הוכחה נוספת, גיאומטרית, שלא קיימת כאן. את ההוכחה המלאה אוכל לשלוח במייל למעוניינים. אין חובה לדעת אותה, כפי שאמר המרצה בכיתה.

על למצוא את התאוצה נגזור את המהירות, או פעמיים את המיקום. $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}$, נמצא כמה $\dot{\hat{\theta}}$ שווה. ע"פ הגדרה: $\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}[-sin\theta, cos\theta] = \left[-sin\theta\dot{\theta}, cos\theta\dot{\theta}\right] = -\dot{\theta}\hat{r}$, נציב שוב בתאוצה ונקבל ביטוי טיפה מסורבל אך הוא הפשוט ביותר: $\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\hat{r} + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\hat{\theta}$ לא נבצע את ההוכחה לכך משום קוצר זמן. יש לנו את הביטוי עבור מהירות ותאוצה במערכת צירים פולרית.

דוגמה: גוף נע בתנועה מעגלית במהירות קצובה, ז"א גודל קבוע אך הכיוון משתנה. ז"א $|\vec{r}| = r_0$. וכיוון התנועה, הזווית θ הכוונה: $\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$. כעת נכתוב את וקטור המהירות: $\dot{\theta} = \omega$ ונקבל כי $\vec{V}(t) = r_0\omega\hat{\theta}(t)$, ועבור התאוצה נציב בנוסחה שפיתנו ונקבל: $\vec{a}(t) = -r_0\omega^2\hat{r}$.

*הערה שאני (דביר) הוספתי