הרצאה 24

נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

טור חזקות הוא טור מהצורה:

$$\sum a_n x_n$$

יש לו רדיוס התכנסות:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

הטור מתכנס (בהחלט) ב - $(-R,R)$. הטור מתבדר עבור $|x|>R$. בנקודות $X=\pm R$ ייתכנו כל 4 האפשרויות של התכנסות/התבדרות.

תחום התכנסות של טור חזקות היא קבוצת הנקודות בהן הטור מתכנס.

סיכום המשפטים האחרונים

טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור בתחום ההתכנסות של הטור.

מסקנה

סכום של טור חזקות הוא פונקציה רציפה בכל תחום ההתכנסות.

אינטגרציה / גזירה איבר איבר

יהי $\sum_{x=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R>0$.

נתבונן בטורים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

מחישוב ישיר של רדיוס ההתכנסות, רואים שלטורים החדשים אותו רדיוס התכנסות.

משפט

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R>0$.

(א) ת״ה $\sum(n+1)a_{n+1}x^n \supseteq$ ת״ה $\sum a_n x^n \supseteq$ ת״ה $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

(ב) לכל x בתחום ההתכנסות:

$$\int_0^x\left(\sum a_n t^n\right)dt=\sum\left(\frac{a_n}{n+1}\right)x^{n+1}$$

$$\left(\sum a_n x^n\right)'=\sum(n+1)a_{n+1}x^n$$

הוכחה

לגבי $\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$: מהמשפט על אינטגרציה איבר איבר. תהי x נקודה בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$. אזי הטור המקורי מתכנס ב - $[0,x]$ ולכן במידה שווה שם. לכן:

$$\int_0^x\left(\sum a_n t^n\right)dt=\sum a_n\int_0^x t^n dt=\sum a_n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{0^{n+1}}{n+1}\right)=\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

(עבור $x=0$ הטענות טריויאליות. עבור $x<0$ נסמן $[0,x]:=[x,0]$ והוכחה לעיל תקפה)

בפרט, תחום התכנסות $\sum a_n x^n \supseteq$ תחום התכנסות $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

לגבי $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$: מהמשפט על גזירה איבר – איבר (אם בקטע סגור מתקיים: $\sum f_n{}'$ מתכנס במידה שווה, $\sum f_n$ מתכנס לפחות בנקודה אחת. אזי $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ו -) בקטע

$$\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n{}'$$

לטור $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ אותו רדיוס התכנסות R.

אם $x\in(-R,R)$ ניקח r כך ש - $x\in[-r,r]\subseteq(-R,R)$. אז הטורים מתכנסים במידה שווה ב - $[-r,r]$ ולכן מגזירה איבר-איבר:

$$\left(\sum a_n x^n\right)' = \sum n a_n x^{n-1} \quad \text{ב} - [-r,r]$$

מהנ״ל, תחום התכנסות $\sum \overbrace{(n+1)a_{n+1}}^{b_n} x^n \supseteq$ ת״ה $\sum a_{n+1}x^{n+1} = \left(\sum \frac{b_n}{n+1}x^{n+1}\right) =$ ת״ה של $\sum a_n x^n$.

$\square$

נותר פתוח: האם במשפט הנ״ל תמיד ת״ה של הטורים זהה.

דוגמה

$$\sum (-1)^n x^n$$

רדיוס התכנסות:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|(-1)^n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$

עבור $x=\pm 1$ הטור מתבדר (האיבר הכללי לא שואף ל - 0).

טור האינטגרל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

מתכנס בנקודה $x=1$ מלייבניץ למרות שהטור המקורי לא!

הצגת פונקציה כטור חזקות

נניח שניתן להציג פונקציה $f(x)$ כסכום של טור חזקות:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

עם רדיוס התכנסות $R>0$.

ב – $(-R,R)$ אפשר לגזור את הטור שוב ושוב, מבלי לשנות את רדיוס ההתכנסות R. לכן:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_kx^{k-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=n!\,a_n$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

לכן הפונקציה f גזירה מכל סדר ב - $(-R,R)$ ומתקיים:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots$$

לא מספיק שהפונקציה f גזירה מכל סדר והטור הממוסגר בעל רדיוס התכנסות חיובי – ראינו:

$$f(x)\coloneqq\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

מתקיים $f^{(n)}(0)=0$ אבל עבור $x\neq 0$:

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

למרות ש - $R=\infty$

משפט (תנאי מספיק להצגת פונקציה כטור חזקות)

תהי f פונקציה, ויהי $r>0$ כך ש – f גזירה בכל סדר ב - $[-r,r]$. אם יש קבוע c כך ש - $\left|f^{(n)}(x)\right|<c$ לכל n ולכל $x\in[-r,r]$ (או אפילו רק $\frac{r^n}{n!}f^{(n)}(x)\to 0$ במידה שווה ב - $[-r,r]$) אזי: $f(x)=\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

הוכחה

ממשפט טיילור מקלורן :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{r_n(x)}$$

כאשר c_x נקודה בין x ל – 0 ולכן $c_x\in[-r,r]$.

$$|r_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(c_x)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}r^{n+1}\to 0$$

לכן $r_n(x)\to 0$ ולכן $f(x)=\lim_n\sum(k=0\ to\ n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

□