נכתב על ידי נועם יערי

התפלגות מעריכית

אם $X \sim Exp(\lambda)$ $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}} = \left[-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \cdot t dt = \cdots = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X) = \cdots = \lambda^2$$

תכונת חוסר הזיכרון

אם $X \sim Exp(\lambda)$, $X - a | X > a \sim Exp(\lambda)$

הוכחה

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt = \left[-e^{-\frac{t}{\lambda}}\right]_a^{\infty} = e^{-\frac{a}{\lambda}}$$

$$f_{(X - a|X > a)}(t) = \frac{f_{X-a}(t)}{P(X > a)} = \frac{f_X(a + t)}{P(X > a)} = \frac{\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{a+t}{\lambda}}}{e^{-\frac{a}{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

זמן מחצית חיים

$X \sim Exp(\lambda)$. $e^{\frac{-?}{\lambda}} = P(X > ?) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow ? = \lambda \cdot \log 2$$

באופן כללי, $P(X > k\lambda) = e^{-k}$

דוגמה

$X_1 \sim Exp(\lambda_1), \qquad X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$Y_1 \sim ?$

$$P(Y_1 \geq t) = P(X_1, X_2 \geq t) = P(X_1 \geq t) \cdot P(X_2 \geq t) = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_2}} = e^{-\frac{t}{\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}}}$$

$$\Rightarrow \min(X_1, X_2) \sim Exp(\lambda)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

מסקנה

באינדוקציה, $X_1,\cdots,X_n\sim Exp(\lambda)$

$$\Rightarrow \min(X_1,\cdots X_n)\sim Exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

בפרט, $E(\min(X_1,\cdots,X_n))=\frac{1}{n}E(X_i)$.

למשתנה מקרי יש "התפלגות גמא"

אם $Y\sim\Gamma(n,\lambda)$ $f_{Y(t)}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!\lambda^n}e^{-\frac{t}{\lambda}}$. שימו לב ש - $\Gamma(1,\lambda)=Exp(\lambda)$

תרגיל

$Y_1\sim\Gamma(n_1,\lambda),\ \ Y_2\sim\Gamma(n_2,\lambda)$ בלתי תלויים. חשב Y_1+Y_2

נוסחה כללית

$$f_{Y_1+Y_2}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y_1}(t)f_{Y_2}(y-t)dt$$

תרגיל

הוכח את הנוסחה על ידי חישוב $P(Y_1+Y_2\le y)$ וגזירה.

פתרון

$$P(Y_1+Y_2\le y)=_{\text{הוכח!}}\int_{-\infty}^{\infty}P(Y_1+Y_2\le y|Y_1=t)\cdot f_{Y_1}(t)dt$$

באופן כללי,

$$P(a)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A|X=t)\cdot f_X(t)dt$$

פתרון התרגיל על התפלגויות גמא:

$$f_{Y_1+Y_2}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!\cdot\lambda^{n_1}}e^{-\frac{t}{\lambda}}\cdot\frac{(y-t)^{n_2-1}}{(n_2-1)!\cdot\lambda^{n_2}}e^{\left(-\frac{y-t}{\lambda}\right)}dt\ =$$

$$=\frac{1}{(n_1-1)!\cdot(n_2-1)!\cdot\lambda^{n_1+n_2}}\cdot\int_0^y t^{n_1-1}(y-t)^{n_2-1}\cdot e^{-\frac{y}{\lambda}}dt=$$

$$=_{\text{אינדוקציה על } n_1,n_2}\frac{y^{n_1+n_2-1}}{(n_1+n_2-1)!\cdot\lambda^{n_1+n_2}}e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow Y_1+Y_2\sim\Gamma(n_1+n_2,\lambda)$$

מסקנה

$$X_1,\cdots,X_n\sim Exp(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)\Rightarrow\sum x_i\sim\Gamma(n,\lambda)$$

טענה

נניח שהזמן בין אירועים $X_i \sim Exp(\lambda)$ מתפלג אקספוננציאלית (עם פרמטר λ).

נחשב את ההתפלגות של מספר המאורעות בזמן t.

נגדיר $N_t = \max_n \{X_1 + \cdots X_n \leq t\}$.

$\{N_t \geq k\} = \{X_1 + \cdots + X_k \leq t\}$

$$P(N_t \leq k) = P(X_1 + \cdots X_k \leq t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!\ \lambda^k} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow P(N_t = k) = P(N_t \leq k) - P(N_t \leq k-1) =$$

$$= [\frac{t^{k-1}}{(k-1)! \cdot \lambda^k} - \frac{t^{k-2}}{(k-2)! \cdot \lambda^k} = \int_0^t \frac{x^{k-1}}{(k-1)! \cdot \lambda^k} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx =_{\text{אינדוקציה על } k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x^i}{i!\, \lambda^i} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow N_t \sim Poi\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$