משפטי איזומורפיזם

משפט האיזומורפיזם השני

תהי G חבורה, ותהיינה $H, N \leq G$ תת-חבורות, כך ש: $N \trianglelefteq G$.

אזי:

1. מתקיים: $N \trianglelefteq NH$.
2. מתקיים: $N \cap H \trianglelefteq H$.
3. מתקיים: ${}^{NH}\!/_{N} \cong {}^{H}\!/_{N \cap H}$.

הוכחה

1. $N \trianglelefteq G$, לכן לכל $g \in G$:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

$NH \leq G$, לכן, בפרט לכל $g \in NH$:

$$gNg^{-1} \subseteq N$$

לכן:

$$N \trianglelefteq NH$$

2. יהי $h \in H$.
יהי $x \in N \cap H$.
בפרט:

$$h \in G$$

$$x \in N$$

$N \trianglelefteq G$, לכן:

$$hxh^{-1} \in N$$

בפרט:

$$h \in H$$

$$x \in H$$

$H \leq G$, לכן:

$$hxh^{-1} \in H$$

לכן:

$$hxh^{-1} \in N \cap H$$

לכן:

$$N \cap H \trianglelefteq H$$

.3 נגדיר:

$$f: H \to {}^{NH}/_{N}$$

לפי:

$$f(h) := hN$$

עפ"י הגדרת f, f אפימורפיזם.

עפ"י הגדרת f:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{h \in H \mid hN = N\} \\ &= \{h \in H \mid h \in N\} \\ &= H \cap N \end{aligned}$$

עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון:

$${}^{H}/_{N \cap H} \cong {}^{NH}/_{N}$$

■

משפט האיזומורפיזם השלישי

תהיינה $B, C \trianglelefteq A$ כך ש: $C \subseteq B$.

אזי:

.1 מתקיים: ${}^{B}/_{C} \trianglelefteq {}^{A}/_{C}$.

2. מתקיים: $\left. A/B \cong {A/C} \middle/ {B/C} \right.$.

הוכחה

נוכיח את (2).

נגדיר:

$$f: \quad A/C \quad \to \quad A/B$$

לפי:

$$f(aC) \quad = \quad aB$$

נוכיח כי f מוגדרת היטב.

אם:

$$aC \quad = \quad a'C$$

אז:

$$a^{-1}a'C \quad = \quad C$$

לכן:

$$\begin{aligned} a^{-1}a' \quad &\in \quad C \\ &\in \quad B \end{aligned}$$

לכן:

$$a^{-1}a'B \quad = \quad B$$

לכן:

$$aB \quad = \quad a'B$$

לכן, f מוגדרת היטב.

מתקיים:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{aC \mid aB = B\} \\ &= \{aC \mid a \in B\} \\ &= {}^{B}/_{C} \end{aligned}$$

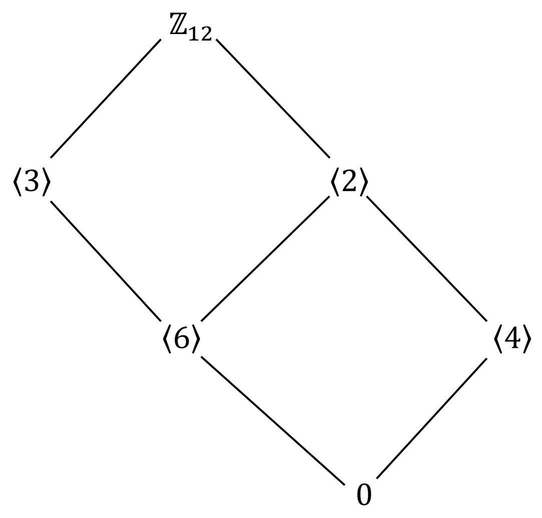
עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון:

$$\left. {}^{A}/_{C} \middle/ {}^{B}/_{C} \right. \cong {}^{A}/_{B}$$

$\blacksquare$

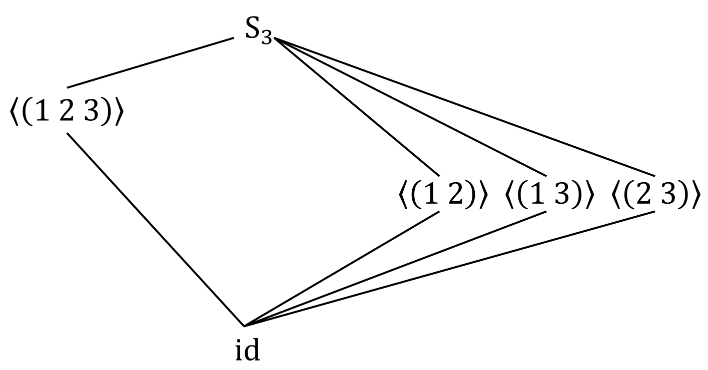
דוגמה

תת-החבורות של $\mathbb{Z}_{12}$:



דוגמה

תת-החבורות של S_3.



הגדרה

סריג הינו קבוצה סדורה, בה לכל a, b קיימים:

$$a \vee b \quad := \quad \sup\{a, b\}$$

$$a \wedge b \quad := \quad \inf\{a, b\}$$

דוגמה

תהי G חבורה.

אוסף תת-החבורות של G הוא סריג, שכן, לכל $H_1, H_2 \leq G$:

$$H_1 \vee H_2 \quad = \quad \langle H_1, H_2 \rangle$$

$$H_1 \wedge H_2 \quad = \quad H_1 \cap H_2$$

■

משפט ההתאמה

תהי G חבורה, ותהי $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית.

נסמן ב - $\mathcal{L}(G, N)$ את אוסף תת-החבורות של G המכילות את N.

נסמן ב - $\mathcal{L}\left({}^{G}/_{N}\right)$ את סריג תת-החבורות של ${}^{G}/_{N}$.

אזי, קיימת התאמה חד-חד-ערכית ועל בין $\mathcal{L}(G, N)$ לבין $\mathcal{L}\left({}^{G}/_{N}\right)$, השומרת על:

- הכלה.
- חיתוך.
- מכפלות.
- נורמליות.
- אינדקסים.

הוכחה

נגדיר:

$$f: \quad \mathcal{L}(G, N) \quad \to \quad \mathcal{L}\left({}^{G}/_{N}\right)$$

$$g: \quad \mathcal{L}\left({}^{G}/_{N}\right) \quad \to \quad \mathcal{L}(G, N)$$

לפי:

$$f(A) \coloneqq A/N$$
$$g(\alpha) \coloneqq \bigcup_{T\in\alpha} T$$

צ"ל כי f,g מוגדרות היטב, הופכות זו את זו ושומרות על הכלה, חיתוך, מכפלה, נורמליות ואינדקסים.

תרגיל: הוכח!

■