אלגברה לינארית 2 | חוברת תרגילים של קווין מנדלבאום

קווין מנדלבאום | הצעת פתרון של יונתן סמידוברסקי

חלק 1: לכסון מטריצות ואופרטורים

(שאלה 1)

תהי $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ כך ש$rank(A) = 1$ וכן $tr(A) = 3$. נמצא ערכים עצמיים
נשים לב שלפי משפט הדרגה

$$1 = rank(A) = n - dim(N(A)) = n - dim(N(A - OI))$$

כלומר $dim(N(A - OI)) = n - 1$
והריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי λ_1 הינו $n - 1$. וידוע $n - 1 = m_{\lambda_1} \leq k_{\lambda_1}$ (הריבוי האלגברי הוא $n - 1$ או n)
אבל נתון כי $tr(A) = 3$ כלומר סכום הערכים העצמיים כולל הריבויים הוא 3. אבל אם הריבוי האלגברי של 0 הוא n אז זה בסתירה לנתון, כי אז סכום הע"ע 0.
לכן- $3 = tr(A) = (n - 1) \cdot 0 + 1 \cdot \lambda_2$
כלומר הע"ע הנוסף הוא 3 וסך הכל-

$$\sigma(A) = \{0, 3\}$$

(שאלה 2)

תהי $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ ונוכיח שאם מקיימת $A^2 + A + I = 0$ אז אין לה ע"ע ממשיים.
נניח בשלילה שקיים $\lambda \in \sigma(A)$ וכן $\lambda \in \mathbb{R}$. כעת קיים לו וקטור עצמי מתאים $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$
כעת נכפול בv את שני צידי המשוואה

$$(A^2 + A + I)v = 0v$$

$$A^2v + Av + v = 0$$

$$A(Av) + \lambda v + v = 0$$

$$A(\lambda v) + \lambda v + v = 0$$

$$\lambda A v + \lambda v + v = 0$$

$$\lambda^2 v + \lambda v + v = 0$$

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)v = 0$$

אבל $v \neq 0$ ולכן $(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$ בסתירה לכך שהוא ממשי.

שאלה 3)

תהי $A \in \mathbb{R}^{4*4}$

$$A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ a & d & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

צ"ל: A לכסינה מעל $\mathbb{R} \Longleftrightarrow a = b = c = 0$.

ידוע כי A לכסינה אם"ם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי. נחשבם

$$p_A(x) = (x-d)^4$$

כעת הריבוי האלגברי של d הוא 4, נחשב ריבוי גיאומטרי

$$V_d = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

כעת הריבוי הגיאומטרי יהיה 4 אם"ם $a = b = c = 0$ וסיימנו.

(שאלה 4

יהי $V=\mathbb{C}_n[x]$ ויהא $T:V\to V$ אופרטור המוגדר כך:

$$T(p(x))=p'(x)+x^n p(0)$$

צ"ל כי T לכסין מעל $\mathbb{C}$.
ניקח בסיס סטנדרטי

$$E=\{1,x,x^2,...,x^n\}$$

כעת

$$[T]_E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & . & 2 & 0 & . & . \\ . & . & . & 3 & 0 & . \\ . & . & . & . & 4 & \\ . & . & . & . & & . \\ 1 & . & . & . & & . \end{pmatrix}$$

נשים לב שאם נשנה את איברי הבסיס לצורה הבאה

$$E'=\{x,x^2,...,x^n,1\}$$

נקבל

$$[T]_{E'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(שאלה 5)

תהי $A \in \mathbb{R}^{n*n}$ כך שסכום כל עמוד שלה הוא 0, נוכיח A לא הפיכה. נסמן

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & . \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & . \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & . & & . & \\ . & . & . & & & . \end{pmatrix}$$

כעת ידוע כי A הפיכה אם ורק אם A^t הפיכה. כעת נכפול את A^t בוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ ונקבל

$$A^t v = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{2,1} + ... + a_{n,1} \\ a_{1,2} + a_{2,2} + ... + a_{n,2} \\ . \\ . \\ . \\ a_{1,n} + a_{2,n} + ... + a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

בגלל סכום העמודות, סך הכל קיבלנו ש0 ע"ע של A^t בפרט היא אינה הפיכה ולכן גם A.

(שאלה 6)

המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$, נוכיח:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-6 & -1 & -4 \\ -3 & x-7 & -7 \\ 0 & 1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-3) \cdot (x-6)^2$$

כעת

$$dim(N(A-6I)) = dim(N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}) = ... = dim(N\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$$

והריבוי האלגברי והגיאומטרי שונים, לכן לא לכסינה.

(שאלה 7)

תהי $A \in \mathbb{R}^{2*2}$ מטריצה סימטרית, נוכיח כי A לכסינה מעל הממשיים.
בעצם, נסמן

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

ואז

$$p_A(x) = (x-a)(x-b) - c^2 = x^2 + (-a-b)x + (ab - c^2)$$

נשים לב שהדיסקרמיננטה שלו הינה

$$(-a-b)^2 - 4(ab-c^2) = a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

אם שווה לאפס, בפרט $c = 0$, אלכסונית וסיימנו.
אחרת, $c \neq 0$ ואז הדסקרמיננטה שלו גדולה מאפס, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים שונים וסיימנו.

שאלה 8)

יהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$ מטריצה כך ש$\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע עם ו"ע מתאים $v \neq 0$.

א) A^k

בעצם λ^k הוא ע"ע עם ו"ע מתאים v.

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2}(Av) = ...\lambda^k V$$

באינדוקציה על k

בסיס $k = 1$ אז $A^1 v = \lambda^1 v$

צעד נניח בעבור $k-1$ מתקיים $A^{k-1}v = \lambda^{k-1}v$, נוכיח בעבור k

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = \lambda A^{k-1} v = \lambda \cdot \lambda^{k-1} v = \lambda^k v$$

ב) A^{-1}

$$v = (A^{-1}A)v = A^{-1}(\lambda v)$$

$$A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

קיבלנו, v ו"ע עם הע"ע $\frac{1}{\lambda}$

ג) $A - \alpha I$

$$(A - \alpha I)v = Av - \alpha v = (\lambda - \alpha)v$$

v ו"ע עם הע"ע $\lambda - \alpha$

שאלה 9)

תהא A מטריצה לכסינה ו-D צורתה האלכסונית, כמו כן תהי גם P המלכסנת. $(P^{-1}AP = D)$

הוכיחו/הפריכו : B לכסינה

<u>**א) $B = A^k$, הוכחה:**</u>

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k$$

אותה P מלכסנת, אבל צורתה האלכסונית D^k

<u>**ב) $B = A^t$, הוכחה:**</u>

כל מטריצה דומה למטריצה המשוחלפת שלה, נסמן

$$Q^{-1}AQ = A^t$$

ואז

$$(P^{-1}Q)A^t(Q^{-1}P) = P^{-1}AP = D$$

הצורה האלכסונית D אבל המלכסנת היא

$$Q^{-1}P$$

<u>**ג) $B = AC$, הפרכה:**</u>

מעל השדה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ניקח $A = I$ אלכסונית ובפרט לכסינה, ומטריצה C לא לכסינה מעל הממשיים, למשל

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$B = AC = I \cdot C = C$$

ואינו לכסין.

<u>**ד) $B = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$, הפרכה:**</u>

ניקח $A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ אלכסונית ובפרט לכסינה ו $C = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ והמטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה.

שאלה 10)

נוכיח, תהי $A \in \mathbb{C}^{n*n}$ המקיימת

$$A^2 + bA + cI = 0$$

וכן $c \neq \frac{1}{4}b^2$
בעצם מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים ובפרט המינימלי. נראה שבמקרה שלנו הוא גם מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.
הדסקרמינטטה של הפולינום המאפס $p(x) = x^2 + bx + c = 0$
היא $b^2 - 4c$ והיא שונה מאפס כי $c \neq \frac{1}{4}b^2$. נסמן $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ ובכל מקרה

$$m_A(x) \in \{(x-\alpha), (x-\beta), (x-\alpha)(x-\beta)\}$$

כל האפשרויות הינן מלל"ש ולפי משפט מהרצאה, לכסין וסיימנו.

שאלה 11)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תשובה:</u>

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-(\sqrt{3}+i)^2}{4} & \frac{2i}{\sqrt{3}-i} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i(\sqrt{3}+i)}{4} & -\frac{2i}{\sqrt{3}+i} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 12)

חשב את $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^7$
נלכסן לקבלת

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^{17} = (PDP^{-1})^{17} = PD^{17}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -131070 & 262142 \\ -131071 & 262143 \end{pmatrix}$$

שאלה 13)

תהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$ ויהי $p \in \mathbb{F}_n[x]$ פולינום.

א) $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A עם ו"ע v אזי $p(\lambda)$ ע"ע של $p(A)$ עם הוקטור v.

<u>הוכחה</u> נסמן $p(x) = \alpha_n x^n + ... + a_1 x + \alpha_0$

כעת

$$p(A) \cdot (v) = (\alpha_n A^n + ... + \alpha_1 A + \alpha_o I)v = \alpha_n \lambda A^{n-1} v + ... + a_1 \lambda v + \alpha_0 v$$

$$= \alpha_n \lambda^n v + ... + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 v = p(\lambda) v$$

ב) נראה ש$p(D)$ צורה אלכסונית של $p(A)$,

$$P^{-1}(p(A))P = P^{-1}((\alpha_n A^n + ... + \alpha_1 A + \alpha_o I)P = \alpha^n P^{-1} A^n P + ... + \alpha_1 P^{-1} AP + \alpha_0 P^{-1} IP$$

$$= \alpha^n D^n + ... + \alpha_1 D + \alpha_0 I = p(D)$$

שאלה 14)

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3*3}$ ויהי $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 4$ נמצא צורה אלכסונית וP מלכסנת ל$p(A)$ בעזרת השאלה הקודמת.

המטריצה המלכנסת של A והצורה האלכסונית הינן

$$P=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&1-i&1+i\\1&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-i&0\\0&0&i\end{pmatrix}$$

מפעילים את p על שתי המטריצות לקבלת

$$P=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&1+i&1-i\\1&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2i&0\\0&0&2i\end{pmatrix}$$

(שאלה 15)

$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$ מתאפסת על ידי הפולינום

$$p(x)=x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)$$

(אין טעם לפתוח עוד את הפולינום כי רכיביו ממשיים ולא יתאפס מגורמים מרוכבים יחידים)

$$m_A(x)\in\{x-1,x^2+x+1,\left(x^2+x+1\right)(x-1),\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)\}$$

פוסלים ומגיעים לכך ש=

$$m_A(x)=\left(x^2+x+1\right)(x-1)$$

(שאלה 16)

תהי $A\in\mathbb{F}^{n*n}$ ו$T_A:\mathbb{F}^{n*n}\to\mathbb{F}^{n*n}$ המוגדרת כך $T(B)=BA$
נוכיח $m_T(x)=m_A(x)$
נראה ש$m_T(A)=m_A(T)=0$ וזה יוכיח משום ש
אם $m_T(x)|m_A(x)$ וגם $m_A(x)|m_T(x)$ אז $m_A(x)=m_T(x)$.
ראשית, נסמן $m_A(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_ix^i$,$m_A(T)=\sum_{i=0}^n\alpha_iT^i$

כעת

$$m_A(T)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i B(A)^i = B\sum_{i=0}^{n}\alpha_i A^i = Bm_A(A)=0$$

ובכיוון השני דומה וסיימנו.

המסקנה היא שT לכסינה אם"ם A לכסינה כי הפ"מ זהה, ואם הוא מתפרק לגורמים לינאריים שונים- לכסינות.

(שאלה 17)

$T:\mathbb{C}^{n*n}\to\mathbb{C}^{n*n}$ מוגדר ע"י $T(A)=A+A^t$, מצאו $p_T(x),m_T(x)$

אם A סימטרית אז $T(A)=A+A^t=2A$ ואז 2 ע"ע.

אם A אנטי-סימטרית אז $T(A)=A+A^t=A-A=0$ ואז 0 ע"ע.

למדנו שכל מטריצה ניתנת לביטוי כסכום של מטריצה סימטרית ואנטי-סימטרית,אלה הע"ע היחידים.

כמו כן, דרגת של מרחב המטריצות הסימטריות הינה $\frac{n}{2}$ ונובע כי

$$p_T(x)=x^{\frac{n^2-n}{2}}(x-2)^{\frac{n^2+n}{2}}$$

כמו כן, היא לכסינה כי מצאנו בסיס המורכבים מו"ע.

$$m_T(x)=x(x-2)$$

(שאלה 18)

נשלש את $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

הפ"א הינו

$$p_A(x)=det\begin{pmatrix}x-1&-2&0\\-4&x-3&0\\-1&0&x\end{pmatrix}=x\cdot det\begin{pmatrix}x-1&-2\\-4&x-3\end{pmatrix}=x(x^2-4x-5)=x(x+1)(x-5)$$

אבל הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים שונים ולכן לכסינה

$$P=\begin{pmatrix}5&-1&0\\10&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$