אסימפטוטות

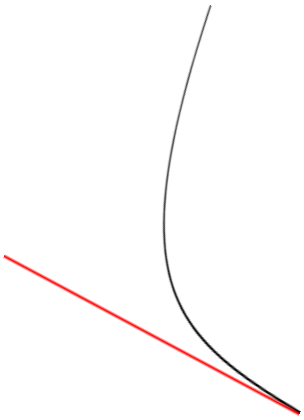
בפרק זה נכיר את מושג האסימפטוטות ונראה איך משתמשים בהן ליצירת תמונה גרפית של פונקציה.

מושג האסימפטוטה במבט גאומטרי

מושג האסימפטוטה מתייחס לעקום במישור:

הישר L נקרא אסימפטוטה של עקום C, אם ניתן להניע נקודה על פני העקום אל אינסוף, כך שהמרחק בינה לבין הישר ישאף ל- 0.

על פי הגדרה זו הישר המסורטט באדום באיור 1 הוא אסימפטוטה של העקום המסורטט בשחור.



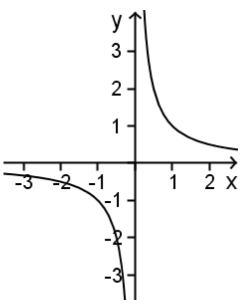
איור 1

באנליזה העקומים שבדיון הם גרפים של פונקציות ממשיות במערכת צירים קרטזית. לגרפים של פונקציות במערכת צירים יכולות להיות אסימפטוטות משלושה סוגים: אופקיות, אנכיות ומשופעות.

לפני הגדרת מושגים אלה באנליזה, נתחיל מדוגמאות פשוטות:

דוגמה 1

באיור 2 מוצג גרף הפונקציה $y=\frac{1}{x}$.



איור 2

נדמיין שאנו מחליקים נקודה מימין לשמאל לאורך הענף הימני של הגרף.

שיעור ה-x של הנקודה הולך ומתקרב לאפס, בזמן ששיעור ה- y של הנקודה שואף ל- ∞, והמרחק בינה לבין ציר ה- y שואף ל- 0.

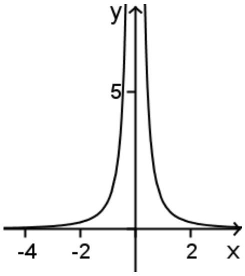
אם נניע נקודה על אותו ענף בכיוון ההפוך משמאל לימין, שיעור ה-x שלה ישאף ל- ∞, שיעור ה- y של הנקודה ישאף לאפס, והפעם המרחק בינה לבין ציר ה-x ישאף ל- 0.

בכך הראינו שצירי המערכת הם אסימפטוטות לענף הימני של הגרף. בדומה מראים שהם אסימפטוטות גם לענפו השמאלי. לגרף של פונקציה $y=\frac{1}{x}$ יש אם כך שתי אסימפטוטות:

אופקית - ציר ה-x, ואנכית - ציר ה-y.

דוגמה 2

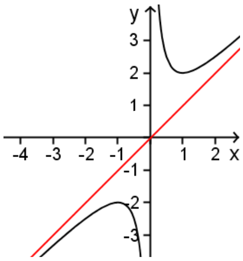
לגרף של הפונקציה $y=\frac{1}{x^2}$ (איור 3),



איור 3

הצירים x ו- y משמשים אסימפטוטות, כמו בדוגמה הקודמת.
ההבדל הוא בכך שכעת שני ענפי הגרף מתקרבים לציר ה- y באותו כיוון - כלפי מעלה.

דוגמה 3



איור 4

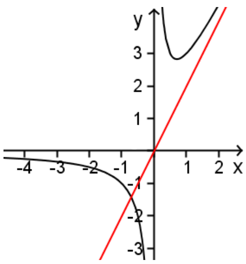
לגרף של הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$ (איור 4),

יש שתי אסימפטוטות: אנכית - ציר ה- y, ומשופעת - הישר $y=x$.

בכל הדוגמאות לעיל לגרף של הפונקציה יש שתי אסימפטוטות מסוגים שונים, אחת מהן – אנכית.

האם קיימת פונקציה אשר לגרף שלה יש שלוש אסימפטוטות משלושה סוגים שונים? התשובה היא חיובית כפי שמראה הדוגמה הבאה.

דוגמה 4



איור 5

נתבונן בגרף $y=x+|x|+\frac{1}{x}$ (איור 5).

לגרף זה ציר ה- y הוא אסימפטוטה אנכית, ציר ה- x - אסימפטוטה אופקית, והישר $y=2x$ הוא אסימפטוטה משופעת.

אסימפטוטות של פונקציות ממשיות

כפי שראינו בדוגמאות לעיל, לגרפים של פונקציות במבט גאומטרי יש אסימפטוטות משלושה סוגים: אופקיות, אנכיות ומשופעות. כאשר מגדירים באנליזה "אסימפטוטה של פונקציה", ההגדרה לא ניתנת במונחי מרחק, כמו בגאומטריה, אלא במונחי גבולות של פונקציה. מהגדרות אלה נובע כי אסימפטוטה של פונקציה היא גם אסימפטוטה של הגרף שלה במובן הגאומטרי.

אסימפטוטות אופקיות של פונקציות ממשיות

הגדרה

1) ישר $y=b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית של פונקציה** $f(x)$ **כאשר** $x\to\infty$, אם הערך של $f(x)$ שואף ל- b כאשר הערך של x שואף ל- ∞, כלומר:

$f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}b$, או בסימון אחר, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

במקום לומר "אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to\infty$" ניתן לומר בקצרה "**אסימפטוטה אופקית ב-** ∞".

2) הישר $y=b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית של פונקציה** $f(x)$ **כאשר** $x\to(-\infty)$, אם הערך של $f(x)$ שואף ל- b כאשר הערך של x שואף ל-$(-\infty)$, כלומר:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

במקום לומר "אסימפטוטה אופקית כאשר x שואף ל- $-\infty$" ניתן לומר בקצרה "אסימפטוטה אופקית ב- $-\infty$".

הערה

לפי ההגדרה לעיל קיום אסימפטוטה אופקית ב- ∞ וקיומה ב-$(-\infty)$ לפונקציה נתונה אינם תלויים זה בזה.
ייתכנו המקרים הבאים:

(1) לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית רק בכיוון אחד: ב- ∞ או ב-$(-\infty)$. למשל, לפונקציה 2^x מתקיים: $\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$ ו- $\lim_{x\to(-\infty)} 2^x = 0$. מכאן, לפי ההגדרה לעיל, הישר $y=0$ (ציר ה- x) הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)=2^x$ רק ב- $-\infty$.

(2) לפונקציה יש אסימפטוטות אופקיות שונות ב- ∞ וב-$(-\infty)$. למשל, לפונקציה $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ יש אסימפטוטה אופקית $y=1$ ב- ∞ ואסימפטוטה $y=-1$ ב-$(-\infty)$ (מדוע?).

(3) לפונקציה יש אותה אסימפטוטה אופקית ב- ∞ וב-$(-\infty)$. למשל, לפונקציה $g(x)=\frac{x}{1+x}$ הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה הן ב- ∞ הן ב- $(-\infty)$, כי: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x}=1$.

(4) לפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות כלל. למשל: הפונקציה $h(x)=x^2$ נטולת אסימפטוטות אופקיות כי $\lim_{x\to\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$.

מציאת אסימפטוטות אופקיות של פונקציה

אם נתונה פונקציה ממשית $f(x)$ שתחום הגדרתה מכיל קרן $x>C$, אז כדי לחקור את קיום אסימפטוטה אופקית לפונקציה זו ב- ∞, יש לפי הגדרה לחשב גבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$. אם הגבול קיים ויש לו ערך סופי b, אזי הישר $y=b$ הוא האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ ב- ∞. אם הגבול אינו קיים או שהוא אינסופי, אזי לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית ב- ∞. בדומה מחפשים אסימפטוטה אופקית ב-$(-\infty)$, כלומר, כאשר $x\to(-\infty)$.

דוגמה

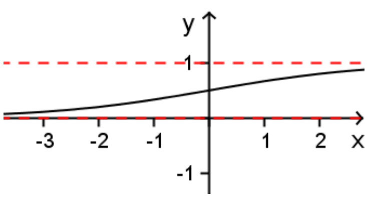
מצאו את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}$.

פתרון

בהסתמך על הגבולות הידועים $\lim_{x\to\infty} 2^{-x} = \lim_{x\to(-\infty)} 2^x = 0$ וחוקי הגבולות נחשב:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{1+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^{-x}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{1+2^x}=\frac{0}{1+0}=0$$



איור 6

מכאן, לפי ההגדרה, הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה הנתונה ב- ∞, והישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית שלה ב- $(-\infty)$. הגרף באיור 6 משקף מסקנות אלה.

אסימפטוטות משופעות של פונקציות ממשיות

הגדרה

ישר משופע $y=ax+b$ $(a \neq 0)$ נקרא אסימפטוטה משופעת של פונקציה $f(x)$ כאשר $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$, אם פונקציית ההפרש $r(x)=f(x)-(ax+b)$ שואפת ל- 0 כאשר x שואף ל- ∞ (שואף ל- $-\infty$) כלומר:

$$r(x)=f(x)-(ax+b)\xrightarrow[\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}]{}0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \underbrace{f(x)-(ax+b)}_{r(x)}=0$$

במקום "אסימפטוטה משופעת כאשר $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ אומרים בקצרה: "אסימפטוטה משופעת ב- ∞ $(-\infty)$".

הערה

עבור אסימפטוטות משופעות של פונקציה $f(x)$, כמו לאסימפטוטות אופקיות, אפשריים ארבעה מקרים:

(1) לפונקציה יש אסימפטוטה משופעת רק ב- ∞ או רק ב- $(-\infty)$,

(2) לפונקציה יש אסימפטוטות משופעות שונות ב- ∞ וב- $(-\infty)$,

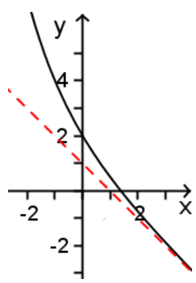
(3) לפונקציה יש אותה אסימפטוטה משופעת ב- ∞ וב- $(-\infty)$,

(4) לפונקציה אין אסימפטוטות משופעות כלל.

מציאת אסימפטוטות משופעות

דרך אחת למציאת אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ היא לנסות להציג אותה בצורה: $f(x)=ax+b+r(x)$ כאשר $a \neq 0$, והפונקציה $r(x)$ שואפת ל- 0 עבור $x \to \infty$ או $x \to -\infty$.

אזי לפי ההגדרה הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת של $f(x)$ ב- ∞ או ב- $-\infty$.



איור 7

למשל, את הפונקציה $f(x)=\dfrac{(1-x)2^x+1}{2^x}$ ניתן להציג בצורה: $f(x)=1-x+2^{-x}$. היות והפונקציה $r(x)=2^{-x}$ שואפת ל- 0 כאשר $x \to \infty$, הישר $y=1-x$ הוא אסימפטוטה משופעת ב- ∞ של $f(x)$. לפונקציה אין אף אסימפטוטה ב- $(-\infty)$ כי הערך של הפונקציה המעריכית 2^{-x} עבור $x \to (-\infty)$ שואף ל- ∞ יותר מהר מהערך של כל פונקציה ליניארית.

הגרף באיור 7 תואם את מסקנותינו.

אם לא מצליחים למצוא אסימפטוטות משופעות בדרך שתוארה לעיל, יש לחפש את המקדמים a,b במשוואת האסימפטוטה $y=ax+b$ ב- ∞ (ב- $-\infty$),לפי הנוסחאות הבאות:

$$\left.\begin{array}{l} a=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left(f(x)-ax\right) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

נראה איך מתקבלות נוסחאות אלה.

אם הישר $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה משופעת ב- ∞ של $f(x)$, אזי לפי ההגדרה:

(**) $\quad f(x)=ax+b+r(x)$ כאשר $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)=0$.

מכאן:

$$\frac{f(x)}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{r(x)}{x}.$$

באגף הימני של שוויון זה, המחובר הראשון הוא מספר קבוע ושני המחוברים האחרים שואפים ל- 0 כאשר $x\to\infty$.

לכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a+0+0=a$$

וכך התקבלה נוסחה לחישוב של a .

משוויון (**) נובע גם כי: $f(x)-ax=b+r(x)$, ומכאן:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=b+\lim_{x\to\infty}r(x)=b+0=b.$$

בכך התקבלה נוסחה לחישוב b. קיבלנו נוסחאות (*) במקרה $x\to\infty$.

הנוסחאות במקרה $x\to(-\infty)$ מתקבלות בדרך דומה.

דוגמה

מצאו אסימפטוטות משופעות של הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} x+e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

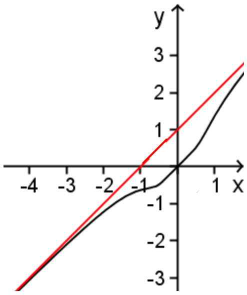
פתרון

כדי למצוא אסימפטוטה של הפונקציה הנתונה ב- ∞ , נשתמש בנוסחאות (*) עבור $x\to\infty$, ובעובדה כי $e^{-\frac{1}{x^2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$ (מדוע?).

מחשבים:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(x+e^{-\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=1$$



איור 8

לכן, האסימפטוטה המשופעת ב- ∞ היא הישר $y=x+1$. קל לראות שכאשר $x\to(-\infty)$ מתקבלים אותם הערכים של a,b. כלומר, הישר $y=x+1$ הוא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה הנתונה הן ב- ∞ והן ב-$(-\infty)$.

הגרף באיור 8 תואם מסקנה זו.

אפשר לאחד חישוב של אסימפטוטות אופקיות ומשופעות. להלן מספר הערות.

הערה 1

אם בחישוב מקדם a עבור אסימפטוטה משופעת, כאשר $x\to\infty$ מתקבל $a=0$, זה מעיד כי לפונקציה אין אסימפטוטה משופעת ב- ∞, אבל יכולה להיות לה אסימפטוטה אופקית. אם נמשיך בחישוב של b עם $a=0$, כלומר נחשב:

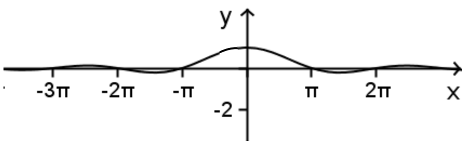
$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

ונקבל ערך סופי עבור b, אזי $y=b$ היא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ ב- ∞. אם הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אינו סופי או אינו קיים כלל, אזי לפונקציה $f(x)$ אין גם אסימפטוטה אופקית ב-∞.

על-פי הנוסחאות (*) ניתן אם כך לחפש בבת אחת אסימפטוטות אופקיות ומשופעות ב- ∞.
מכאן, לא ייתכן שלפונקציה נתונה $f(x)$ יש ב- ∞ יותר מאסימפטוטה אחת, אופקית או משופעת.

מסקנה דומה תקפה לגבי אסימפטוטות אופקיות ומשופעות ב- $-\infty$.

הערה 2



איור 9

אסימפטוטות לפונקציה $f(x)$ ב- ∞ וב-$-\infty$ הן גם אסימפטוטות לגרף שלה במובן הגאומטרי.
אכן, אם נקודה נעה על-פני הגרף כך ששיעור ה-x שלה ישאף ל- ∞ (ל-$-\infty$), אזי המרחק בין הנקודה לבין האסימפטוטה של הפונקציה ישאף ל- 0.

מצב זה גורם לתמונה ויזואלית של התקרבות הגרף לאסימפטוטה ככל שמתקדמים על פניו בכיוון ∞ ($-\infty$).

לעתים קרובות הגרף של פונקציה מתקרב לאסימפטוטה אופקית/משופעת שלה באופן מונוטוני, בלי לגעת בה אף פעם. הדוגמה האופיינית לכך היא התנהגות הגרף $y=\frac{1}{x}$ כלפי ציר x. יחד עם זאת יש מקרים בהם הגרף מתנודד אינסוף פעמים סביב האסימפטוטה, כמו הגרף $y=\frac{\sin x}{x}$ סביב ציר ה-x (איור 9).

הגרף חותך את ציר ה-x בנקודות $(m\cdot\pi,0)$ כאשר $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, ועובר בהן מצד אחד של הציר לצידו השני. הסטייה המקסימלית של הגרף מהציר בקטע בין שתי נקודות עוקבות $m\cdot\pi$ ו-$(m+1)\pi$ שואפת ל- 0 כאשר $m\to\pm\infty$. דוגמה זו מפריכה דעה שגויה שלגרף של פונקציה ואסימפטוטה אופקית/משופעת לא יכולות להיות נקודות משותפות.

יכולות להיות אף אינסוף נקודות כאלה!

הערה 3

עוד דעה שגויה בעניין של אסימפטוטות אופקיות ומשופעות היא, שפונקציות בעלות אסימפטוטות משופעות נדירות, בהשוואה לפונקציות בעלות אסימפטוטות אופקיות. כדי להפריך דעה זו, נציין כי לכל פונקציה $f(x)$ בעלת אסימפטוטות אופקיות, ניתן להתאים משפחה אינסופית של פונקציות עם אסימפטוטות משופעות, על-ידי ההוספה ל- $f(x)$ פונקציות ליניאריות $ax+b$ עם $a\neq 0$ ו- b כלשהו.

למשל, לפונקציה אחת $f(x)=\frac{1}{x}$ עם אסימפטוטה אופקית $y=0$ ניתן להתאים משפחה אינסופית $\left\{ax+b+\frac{1}{x}\right\}_{a\neq 0,b\in\mathbb{R}}$ של פונקציות, בה לכל פונקציה יש אסימפטוטה משופעת $y=ax+b$ ב- ∞ וב- $-\infty$.

אסימפטוטות אנכיות של פונקציות ממשיות

נניח כי במערכת צירים נתון ישר מאונך לציר ה- x, העובר דרך הנקודה $(x_0,0)$. משוואת ישר זה היא $x=x_0$.
נבחר במישור נקודה כלשהי (x_1,y_1) מימין לישר, וננסה בתנועה אחת רציפה להניע עיפרון בו-זמנית שמאלה ולמעלה, כך שקצהו יתקרב לישר $x=x_0$ בלי לגעת בו אף פעם. בתנועה כזו, אם (x,y) היא נקודת קצה העיפרון, אז x שואף ל- x_0 ו- y שואף לאינסוף. אילו היינו יכולים להמשיך תנועה עד אינסוף, היינו מקבלים קו עבורו הישר $x=x_0$ הוא אסימפטוטה. לאותה תוצאה היינו מגיעים אם העיפרון הונע מהנקודה ההתחלתית (x_1,y_1) בו-זמנית שמאלה ולמטה. אם נבחר נקודה (x_1,y_1) לא מימין לישר $x=x_0$ אלא משמאל לו, ונניע עיפרון בו-זמנית ימינה ולמעלה או ימינה ולמטה, תוך התקרבות מתמדת לישר, ונמשיך כך עד אינסוף, בלי לגעת בישר, נקבל שוב קו עבורו הישר $x=x_0$ הוא אסימפטוטה.

ההתנסויות שתוארו לעיל עשויות להקל על הבנת ההגדרה הבאה.

הגדרה

הישר $x=x_0$ נקרא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $f(x)$ אם לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה x_0: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, שווה ∞ או $(-\infty)$.

הערה

כמו במקרה של אסימפטוטות אופקיות ומשופעות, אסימפטוטה אנכית של פונקציה היא גם אסימפטוטה של הגרף שלה.

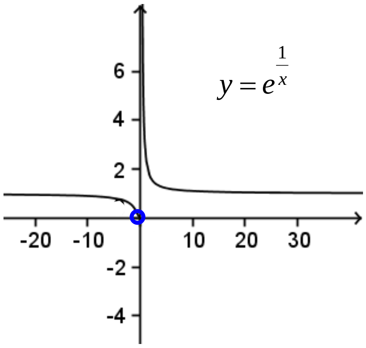
דוגמה

נמצא את הגבולות החד-צדדיים של לפונקציה $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ בנקודה $x=0$. כאשר $x\to 0^+$, המעריך $\frac{1}{x}$ שואף ל- ∞, והערך של $e^{\frac{1}{x}}$ גם הוא שואף ל- ∞, כלומר $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$.

מכאן, על-פי ההגדרה לעיל, מסיקים כי הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית של $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

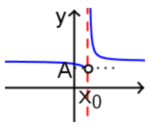
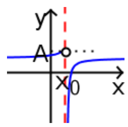
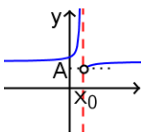
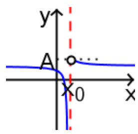
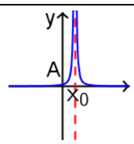
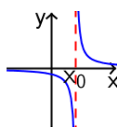
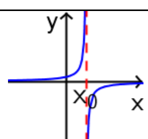
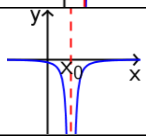
הגרף מתקרב לאסימפטוטה זו מימין כלפי מעלה. אם ברצוננו לבדוק את התנהגות הגרף ביחס לאסימפטוטה משמאל לה, עלינו לחשב את הגבול של $e^{\frac{1}{x}}$ בנקודה $x=0$ מצד שמאל.

היות ו- $\frac{1}{x}$ שואפת ל- $(-\infty)$ כאשר $x \to 0^-$, מתקבל: $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$. מכאן מסיקים כי הגרף $y = e^{\frac{1}{x}}$ משמאל לאסימפטוטה $x = 0$ לא מתקרב אליה אלא לנקודה $(0,0)$.
הגרף באיור 10 תואם מסקנות אלה.



איור 10

בטבלה 1 מתוארים מקרים טיפוסיים של גבולות חד-צדדיים בהם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = x_0$, ומוצגות תמונות גרפיות מתאימות.

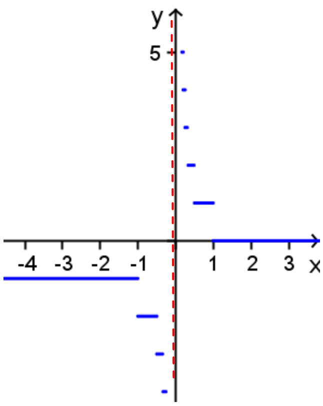
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$	**תמונה גרפית**
∞	$A \neq \pm\infty$	
$-\infty$	$A \neq \pm\infty$	
$A \neq \pm\infty$	∞	
$A \neq \pm\infty$	$-\infty$	
∞	∞	
∞	$-\infty$	
$-\infty$	∞	
$-\infty$	$-\infty$	

טבלה 1: אסימפטוטות אנכיות – מקרים טיפוסיים

הערה 1

אם בין שני הגבולות החד-צדדיים של $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$, רק גבול אחד שווה ∞ או $-\infty$, אז הישר $x=x_0$ נקרא "אסימפטוטה חד-צדדית", ואם שני הגבולות כאלה, אז הישר נקרא "אסימפטוטה דו-צדדית". הגרף $y=f\left(x\right)$ מתקרב לאסימפטוטה מימין/משמאל כלפי מעלה, אם הגבול של $f\left(x\right)$ בנקודה $x=x_0$ מצד זה שווה ∞, וכלפי מטה – אם הוא שווה $\left(-\infty\right)$.

הערה 2



איור 11

בתמונות בטבלה 1 לעיל, כל הגרפים מתקרבים לאסימפטוטות ברציפות ובמונוטוניות: ככל ש- x יותר קרוב ל- x_0 הערך המוחלט של $|y|$ בנקודה $\left(x,y\right)$ על הגרף יותר גדול.

מצב זה אינו הכרחי לקיום אסימפטוטה אנכית.

הפונקציה $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]$ [איור 11] מדגימה פונקציה אשר הגרף שלה אינו רציף ומתקרב אל הישר $x=0$ "בקפיצות".

פונקציה זו מוגדרת לכל x ממשי, למעט $x=0$.

קל לבדוק כי בקטע $-1\le x\le 1$ ניתן לתאר אותה באופן הבא:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} n, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n} \\ -\left(n+1\right), & -\dfrac{1}{n}<x\le-\dfrac{1}{n+1} \end{cases} \qquad \left(n=1,2,3,\ldots\right)$$

מכאן: $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\infty$ ו- $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=-\infty$. לכן הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה דו-צדדית לפונקציה.

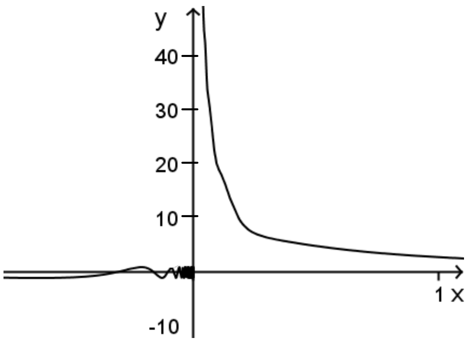
נציין כי קצהו הימני של כל קטע בגרף שייך לגרף ואילו קצהו השמאלי לא שייך לגרף.

הערה 3

בטבלה 1 לעיל מתוארים מקרים כאשר שני גבולות חד-צדדיים הם אינסופיים, או אחד סופי ואחד אינסופי.

ייתכן גם שאחד מהגבולות הוא ∞ או $-\infty$, והשני אינו קיים, לא סופי ולא אינסופי.

דוגמה



איור 12

תהי $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

פונקציה זו ניתן להציג גם כ-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ \\ \sin\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

כאשר $x\to 0^-$, הגרף של הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ מתנדנד אינסוף פעמים בין $y=-1$ ו- $y=1$. מכך נובע כי הגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x}$ אינו קיים, לא סופי ולא אינסופי.

כאשר $x\to 0^+$, הפונקציה $\frac{2}{x}$ שואפת ל- ∞ והפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ נשארת חסומה, לכן פונקציית הסכום $\frac{2}{x}+\sin\frac{1}{x}$ שואפת ל- ∞ , כלומר $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)=\infty$. מכאן נובע כי הישר $x=0$ (ציר ה- y) הוא אסימפטוטה מצד ימין של הפונקציה $f(x)$, כאשר הגבול שלה בנקודה $x=0$ מצד שמאל אינו קיים כלל. הגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מוצג באיור 12.

הוא מתקרב לציר ה- y מימין בכיוון כלפי מעלה ומשמאל לציר זה מבצע אינסוף תנודות חסומות סביב ציר ה- x .

שאלה למחשבה

ברור שאם הישר $x=x_0$ הוא אסימפטוטה של $f(x)$, אז $f(x)$ אינה חסומה בכל סביבה של $x=x_0$.

האם נכונה הטענה ההפוכה: אם פונקציה $f(x)$ אינה חסומה בכל סביבה של הנקודה $x=x_0$ אזי הישר $x=x_0$ הינו בהכרח אסימפטוטה של $f(x)$? אם כן, הוכיחו, אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

פתרון

הטענה אינה נכונה. למשל, הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה חסומה באף קטע $-\varepsilon<x<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$.

אבל בכל קטע כזה ערכי הפונקציה מתנודדים בין $-\infty$ ו- ∞. לכן אף אחד משני הגבולות החד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה $x=0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ו- $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ אינו קיים, לא סופי ולא אינסופי.

מכאן, הישר $x=0$ (ציר ה- y) אינו אסימפטוטה של $f(x)$.

מציאת אסימפטוטות אנכיות של פונקציות אלמנטריות

אם $f(x)$ פונקציה אלמנטרית והנקודה $x=x_0$ שייכת לתחום הגדרתה, אזי מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\neq\pm\infty .$$

לכן, דרך אף נקודה בתחום הגדרתה של פונקציה אלמנטרית לא יכולה לעבור אסימפטוטה אנכית שלה. הנקודות "החשודות לאסימפטוטה אנכית" לפונקציה כזאת הן נקודות האי-הגדרה של הפונקציה הנמצאות בשפת תחום הגדרתה. הבדיקה של "נקודות חשודות לאסימפטוטה אנכית" נעשית על- ידי חישוב בנקודות אלה של גבולות הפונקציה החד-צדדיים.

על-פי ההגדרה, דרך הנקודה $x=x_0$ עוברת אסימפטוטה אנכית של $f(x)$ אם ורק אם לפחות אחד מהגבולות $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ הינו ∞ או $-\infty$.

דוגמה

מצאו את כל האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)(x-3)}$.

פתרון

הפונקציה הנתונה היא פונקציה אלמנטרית, כי היא מתקבלת מפונקציות אלמנטריות בסיסיות: $\ln x,\ x,\ 1,\ 3$

על-ידי מספר סופי של פעולות חשבון. תחום ההגדרה של פונקציה זו הוא:

$$x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 3 .$$

נקודות האי-הגדרה אשר נמצאות בשפה של תחום זה הן: $x=0, x=1, x=3$.

נחשב גבולות בכל אחת מנקודות אלה.

בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

בנקודה $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

בשבר האחרון המונה והמכנה שואפים ל- 0 כאשר $x\to 1$. זה מצב אי-וודאות שניתן לפצחו באמצעות כלל לופיטל (ראו עמוד 608). ניתן גם לשער את ערכו של הגבול בדרך נומרית. כך, למשל, עבור $x=1.01$ הערך של השבר הוא: $\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln 1.01}{0.01}\approx 0.995$, ועבור $x=0.99$ הוא: $\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln 0.99}{-0.01}\approx 1.005$.

ההשערה היא ש- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$. השימוש בכלל לופיטל מאשר השערה זו. בכך, $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=-\frac{1}{2}$.

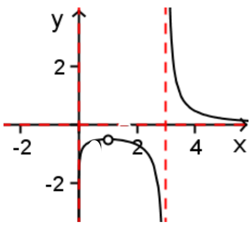
בנקודה $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln x}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}=\frac{\ln 3}{2}\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 3^-}\frac{\ln x}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}=\frac{\ln 3}{2}\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$

מהתוצאות שהתקבלו נובע כי אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה הנתונה עוברות דרך הנקודות $x=0$ ו- $x=3$.

נקודת האי-הגדרה $x=1$ לא גורמת לאסימפטוטה אנכית אלא לנקודה ריקה $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ ("חור") בגרף הפונקציה. עוד ניתן להסיק מהתוצאות של חישוב גבולות שהגרף מתקרב לציר y בכיוון כלפי מטה, ולישר $x=3$ הוא מתקרב כלפי מעלה מימין וכלפי מטה משמאל. הגרף באיור 13 תואם מסקנות אלה.



איור 13

הערה 1

כאשר בחישוב גבולות חד-צדדיים של פונקציה בנקודה כלשהי מקבלים לגבול מצד אחד כלשהו, תוצאה ∞ או $-\infty$, אין צורך לחשב גבול שני לשם קביעה שדרך נקודה זו עוברת אסימפטוטה אנכית. אבל ידיעת שני הגבולות באותה נקודה, מאפשרת לאפיין את אופן ההתנהגות של גרף הפונקציה משני צדי האסימפטוטה.

הערה 2

במקרה של פונקציה שאינה אלמנטרית ייתכן שאסימפטוטה עוברת דרך נקודת ההגדרה. למשל הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

מוגדרת בנקודה $x=0$, ובכל זאת ציר ה- y מהווה לה אסימפטוטה, כי $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$. לאסימפטוטה אנכית של פונקציה ולגרף הפונקציה יכולה להיות, כמובן, נקודה משותפת אחת לכל היותר.

לאחר שהצגנו את ההגדרות ודרכי מציאתן של אסימפטוטות משלושה סוגים, נסקור את תכונותיהן המרכזיות בטבלה 2.

תכונה	אסימפטוטות אופקיות $y=b$	אסימפטוטות משופעות $y=ax+b$ $(a\neq 0)$	אסימפטוטות אנכיות $x=x_0$
התקרבות של גרף הפונקציה לאסימפטוטות	הגרף מתקרב לאסימפטוטה כאשר $x\to\infty$ ו/או כאשר $x\to(-\infty)$.	הגרף מתקרב לאסימפטוטה כאשר $x\to\infty$ ו/או כאשר $x\to(-\infty)$.	הגרף מתקרב לאסימפטוטה כאשר $x\to x_0^+$ ו/או $x\to x_0^-$.
מספר נקודות משותפות לאסימפטוטה וגרף	מקרים אפשריים: (1) לאסימפטוטה ולגרף אין אף נקודה משותפת. (2) לאסימפטוטה ולגרף יש מספר סופי של נקודות משותפות. (3) לאסימפטוטה ולגרף יש אינסוף נקודות משותפות. דוגמה: הגרף $y=\frac{\sin x}{x}$ והישר $y=0$.	מקרים אפשריים: (1) לאסימפטוטה ולגרף אין אף נקודה משותפת. (2) לאסימפטוטה ולגרף יש מספר סופי של נקודות משותפות. (3) לאסימפטוטה ולגרף יש אינסוף נקודות משותפות. דוגמה: הגרף $y=x+\frac{\sin x}{x}$ והישר $y=x$.	מקרים אפשריים: (1) לאסימפטוטה ולגרף אין אף נקודה משותפת. (2) לאסימפטוטה ולגרף יש נקודה משותפת אחת בלבד (ראו הערה 2 לעיל).
מספר אסימפטוטות שונות של אותה פונקציה	מקרים אפשריים: (1) לפונקציה אין אף אסימפטוטה אופקית. (2) לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית אחת. (3) לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אופקיות.	מקרים אפשריים: (1) לפונקציה אין אף אסימפטוטה משופעת. (2) לפונקציה יש אסימפטוטה משופעת אחת. (3) לפונקציה יש שתי אסימפטוטות משופעות.	מקרים אפשריים: (1) לפונקציה אין אף אסימפטוטה אנכית. (2) לפונקציה יש מספר סופי של אסימפטוטות אנכיות. (3) לפונקציה יש אינסוף אסימפטוטות אנכיות (ר' דוגמאות בתיאור אסימפ' של פונקציות טריגו' בסעיף 4.3).

טבלה 2: אסימפטוטות של פונקציות - תכונות יסודיות

לאסימפטוטות אופקיות ומשופעות יש אותן תכונות יסוד. עובדה זו נובעת מכך שאסימפטוטות אלה שונות רק באופי השיפוע, אשר שווה ל- 0 במקרה של אסימפטוטות אופקיות, ושונה מ- 0 במקרה של אסימפטוטות משופעות. ניתן לאחד אסימפטוטות משני סוגים אלה למחלקה אחת של אסימפטוטות בעלות שיפוע. בין אסימפטוטות אלה לבין אסימפטוטות אנכיות נטולות שיפוע קיים הבדל משמעותי בכל תכונות היסוד, כפי שרואים בטבלה 2.

בפרקי הספר העוסקים במשפחות שונות של פונקציות יהיה טיפול נוסף באסימפטוטות לסוגיהן.
נסיים את הפרק במשימות אחדות שמטרתן להעמיק את הבנת הקשרים שבין תבנית הפונקציה, הגרף שלה, והאסימפטוטות שלה, ולפתח אצל לומדי אנליזה מיומנויות חשובות של המחשת גבולות, הצגתם בגרף, וקריאת תכונות של פונקציה מהגרף שלה.

אסימפטוטות של פונקציה ככלי להצגת גבולות הפונקציה באמצעות הגרף שלה

לגבולות של פונקציה יש תפקיד חשוב בחקירת הפונקציה ובבניית הגרף שלה. בסעיף זה הקשר בין הגבולות והגרף של הפונקציה מוצג בשני הכיוונים: קריאת הגבולות מהגרף, והצגת גבולות בגרף. בכל כיוון המטרה מושגת בעזרת אסימפטוטות של פונקציה.

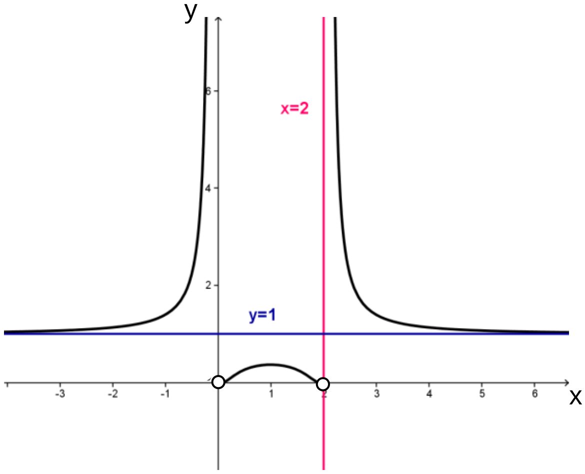
קריאת גבולות של פונקציה מהגרף שלה כשהאסימפטוטות נתונות

תרגיל 1

לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ בו צוינו כל האסימפטוטות שלו (איור 14).

קבעו על-פי הגרף את ערכי הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \_\_\_$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \_\_\_$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \_\_\_$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \_\_\_$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \_\_\_$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \_\_\_$$



איור 14

תרגיל 2

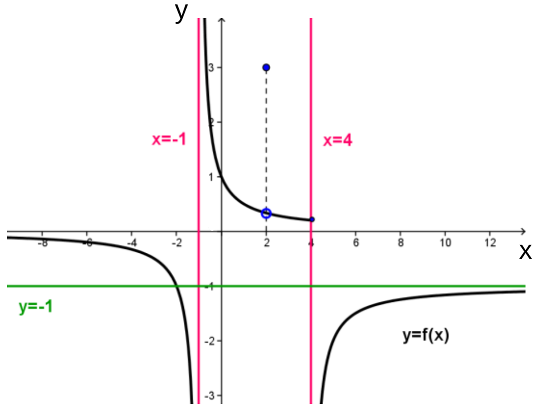
לפניכם גרף של פונקציה $y=f(x)$ המוגדרת בכל ציר ה-x, למעט $x=-1$ (איור 15).

דרך הנקודות $x=-1, x=4$ עוברות אסימפטוטות אנכיות של הגרף.

לגרף יש שתי אסימפטוטות אופקיות: $y=-1$ ב- ∞ ו- $y=0$ ב- $(-\infty)$.

בנקודה $\left(2,\frac{1}{3}\right)$ בגרף יש "חור" (נקודה ריקה), וידוע $f(2)=3$.

בנקודה $x=4$ הפונקציה מוגדרת: $f(4)=\frac{1}{4}$.



איור 15

תארו את גבולות הפונקציה $f(x)$ בנקודות $x=-1, x=2, x=4$ וב- ∞ ו-$(-\infty)$.

הצגת גבולות של פונקציה בגרף שלה באמצעות אסימפטוטות

תרגיל 3

סרטטו גרף של פונקציה $f(x)$ המקיימת את התנאים הבאים:

(1) $f(x)$ מוגדרת בכל ציר ה- x, למעט הנקודות $x=-2, x=0, x=3$.

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$

(3) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

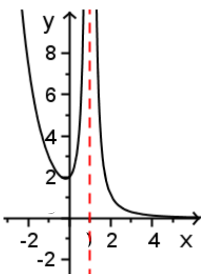
מגרף של פונקציה לתבנית שלה על בסיס גבולות ואסימפטוטות

תרגיל 4

זהו, מבין הפונקציות שברשימה, את הפונקציה שהגרף שלה מופיע באיור 16.
נמקו את בחירתכם. בדקו את בחירתכם באמצעות תוכנת מחשב.

(1) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $g(x)=\frac{e^x}{(x-1)^2}$ (3) $h(x)=\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}$

(4) $p(x)=e^{-x}+\frac{1}{(x-1)^2}$ (5) $q(x)=e^{-x}-\frac{1}{(x-1)^2}$



איור 16

תרגילים כדוגמת תרגיל 4 לעיל מחייבים קריאת גבולות הפונקציות מתוך הגרפים שלהן, ובנוסף מבוצעת הערכת גבולות של פונקציות על-פי כללי ההתאמה שלהן. תרגילים כאלה מאוד מועילים להעמקת ההיכרות עם פונקציות אלמנטריות ותכונותיהן.

אחת הדרכים לבנות תרגיל מסוג זה היא להציג על צג של מחשב גרף של פונקציה ללא התבנית, כשהתלמידים מתבקשים לזהות את הפונקציה המתאימה לגרף.

משימה מסוג זה ניתן לבצע בשיטת "ניסוי וטעייה" על-ידי ביצוע חוזר של שלושה שלבים:

1) העלאת השערה לגבי תבנית מתאימה,
2) סרטוט גרף על-פי התבנית המשוערת בתוכנת המחשב,
3) השוואה בין הגרף המתקבל לבין הגרף הנתון.

אם שני הגרפים שונים, חוזרים לשלב הראשון עם השערה חדשה. עד שמתקבל גרף זהה לגרף הנתון.

החיפוש אחר השערה מוצלחת יותר מההשערה הקודמת מחייב את המחפש להבין ממה נובעים ההבדלים בין הגרף של הפונקציה המשוערת לבין הגרף הנתון בתרגיל, להתבונן בפרטים ולעקוב אחר שינויים שחלים בגרף הפונקציה, בעקבות שינויים בתבניתה.

ניתן להציע תרגילים דומים במתכונת של תחרות בין קבוצות לומדים. להלן פתרונות התרגילים 1 – 4.

פתרון תרגיל 1

לפי הגרף לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות, $x=0$ ו- $x=2$, ואסימפטוטה אופקית $y=1$ ב- ∞ וב- $(-\infty)$.

מכאן:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=0, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to(-\infty)} f(x)=1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

פתרון תרגיל 2

לפי התמונה הגרפית מוצאים את הגבולות:

בנקודה $x=-1$ הגבול מימין שונה מהגבול משמאל ומכאן שלא קיים גבול לפונקציה.

בנקודה $x=2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{1}{3}$ ולכן $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{3}$.

בנקודה $x=4$: $\lim_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\frac{1}{4}$. לכן $\lim_{x\to 4} f(x)$ אינו קיים.

ב- $(-\infty)$ וב- ∞ : $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

פתרון תרגיל 3

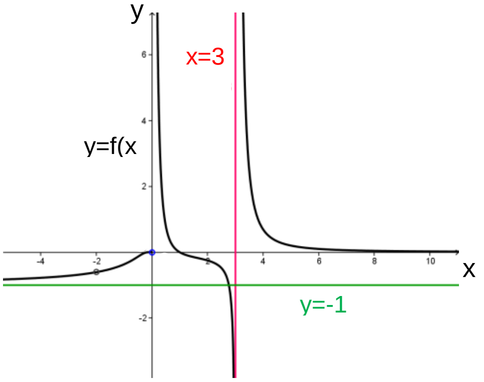
מהתנאים (2) ו- (6) נובע, כי לגרף יש שתי אסימפטוטות אופקיות: $y=-1$ ב- $(-\infty)$, ו- $y=0$ ב- ∞ .

מהתנאים (4) ו- (5) נובע, כי לגרף יש שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=0$ ו- $x=3$.

בהתאם ל- (4), הגרף מתקרב לאסימפטוטה $x=0$ רק מצד ימין, בכיוון כלפי מעלה, כאשר מצד שמאל הוא מתקרב לנקודה ריקה $(0,0)$.

בהתאם ל- (5), לאסימפטוטה $x=3$ הגרף מתקרב משני הצדדים בכיוונים נגדיים: מימין - כלפי מעלה ומשמאל - כלפי מטה.

היות ולפי הנתון הנקודה $x=-2$ היא נקודת אי-הגדרה של הפונקציה, מ- (3) נובע כי בנקודה $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ לגרף יש "חור" (נקודה ריקה).



איור 17

באיור 17 מוצג גרף המקיים את כל התנאים האלה. יש, כמובן אינסוף גרפים העונים על כל הדרישות שבתרגיל.

פתרון תרגיל 4

נאתר פונקציות שאינן מתאימות לגרף. פונקציה $f(x)$ שואפת ל- 0 בשני הכיוונים: $x\to\pm\infty$, והפונקציה המוצגת בגרף שואפת ל- 0 רק כאשר $x\to\infty$. פונקציה $g(x)$ שואפת ל- ∞ , כאשר $x\to\infty$, והפונקציה המוצגת בגרף שואפת ל- 0 כאשר $x\to\infty$. הפונקציה $h(x)$ בנקודה $x=0$ מקבלת ערך $h(0)=1$ כאשר ערך הפונקציה המוצגת בגרף בנקודה $x=0$ הוא 2. הגבולות של הפונקציה $q(x)$ בנקודה $x=1$ משני הצדדים שווים ל- $(-\infty)$, כאשר לפונקציה המוצגת בגרף שני הגבולות שווים ל- ∞ . בכך נשארת רק הפונקציה $p(x)=e^{-x}+\frac{1}{(x-1)^2}$ אשר אכן תואמת לתכונות של הפונקציה המוצגת בגרף, כי:

$$\lim_{x\to\infty} p(x)=0, \lim_{x\to-\infty} p(x)=\infty, \lim_{x\to 1^-} p(x)=\lim_{x\to 1^+} p(x)=\infty$$

ו- $p(0)=2$.

הפונקציה המבוקשת היא (4).