דף 1

משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 4

Variation of parameters / וריאציית המקדמים

תזכורת מאלגברה לינארית: כלל קרמר / Cramer's rule

Gabriel Cramer (שווי')

תהי מערכת משוואות $A\vec{x}=\vec{b}$, $A\in M_n$

$b\in F^n$

למערכת קיים פתרון יחיד אם ורק אם $det(A)\neq 0$

אם קיים פתרון יחיד ניתן למצוא כל רכיב בו ע"י:

$$x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)}$$

, A_i מטריצה המתקבלת ע"י החלפת העמודה ה-i שבמטריצה A בוקטור $\vec{b}$.

- היתרון שבשיטה זו הוא שלא חייבים לפתור את כל מערכת המשוואות לקבלת רכיב מסוים.

<u>דוגמא:</u> פתור את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} 4x-y+z=-5 \\ 2x+2y+3z=10 \\ 5x-2y+6z=1 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u> בכתיב מטריצות

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 4\cdot(12+6) + 1\cdot(12-15) + 1\cdot(-4-10) = 55$$

בחישוב נקבל: $\det A_1 = -55 \ ; \ \det A_2 = 165 \ ; \ \det A_3 = 110$

נחשב לפי הכלל את כל הרכיבים:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-55}{55} = -1$$

$$y = \frac{165}{55} = 3 \quad , \quad z = \frac{110}{55} = 2$$

וקטור הפתרון יהיה

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נחזור למד"ר לינארית מסדר n בצורה מנורמלת

$$1\cdot y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)} = b(x)$$

בתרגול הקודם ראינו שאם נתונים לנו n פתרונות בת"ל $y_1, \dots, y_n$, של המשוואה ההומוגנית הקשורה $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)} = 0$,

אזי פתרון כללי למד"ר (האי-הומוגנית) הינו: $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i(x)$

כאשר $c_1, \dots, c_n$ מקיימים:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

אם המד"ר לא מנורמלת מקבלים $\frac{b(x)}{a_n(x)}$

הוכחה ע"י גזירת y והצבה במד"ר האי-הומוג'

כעת, נוכל להפעיל את כלל קרמר, ונקבל:

$$c_i'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & b(x) & \cdots & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1,\dots,y_n)} = \frac{\overset{\text{סימון}}{W_i(x)}}{\underset{\text{ורונסקיאן}}{W(x)}}$$

ע״י אינטגרל נקבל:

$$C_i(x)=\int^x \frac{W_i(t)}{W(t)}\,dt + K_i$$

וקיבלנו פתרון כללי למד״ר:

$$\boxed{y(x)= y_1(x)\left(\int^x \frac{W_1(t)}{W(t)}\,dt + k_1\right)+\cdots+y_n(x)\left(\int^x \frac{W_n(t)}{W(t)}\,dt+K_n\right)}$$

הערה:

$$\frac{d}{dx}\int^x f(t)\,dt = f(x)$$

- הגבול התחתון באינטגרלים נקבע בהתאם לנתוני השאלה,
אם נפתח סוגריים נשים לב כי:

$$y(x)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i\, y_i(x)}_{\text{הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הקשורה.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\int^x \frac{W_i(t)}{W(t)}\,dt}_{\text{פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית}}$$

לגבי סימונים: נשתמש מעתה בסימון מהספרות באנגלית

$y_g \rightarrow$ general solution $\rightarrow$ פתרון כללי

$y_p \rightarrow$ particular solution $\rightarrow$ פתרון פרטי

$$\boxed{y = y_g + y_p}$$

הערה: חשוב מאוד שהמד״ר מנורמלת $(a_n(x)=1)$
אחרת, הפתרון אינו נכון.

תרגיל: למשוואות הבאות נתונים שני פתרונות בת"ל למשוואה ההומוג' הקשורה, פתור:

א. $y''-2y'-3y=2\sin x \; ; \; e^{-x}, e^{3x}$

ב. $y''-2y'=x+2e^{x} \; ; \; 1, e^{2x}$

פתרון: א. נחשב ורונסקיאן, W_1 ו- W_2:

$$W(e^{-x},e^{3x})=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=3e^{2x}+e^{2x}=4e^{2x}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2\sin x & 3e^{3x}\end{vmatrix}=-2\sin x\cdot e^{3x}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 2\sin x\end{vmatrix}=2\sin x\cdot e^{-x}$$

$$C_1'=\frac{W_1}{W}=\frac{-2\sin x\cdot e^{3x}}{4e^{2x}}=-\frac{1}{2}\sin x\cdot e^{x}$$

ע"י אינטגרציה בחלקים

$$C_1=\int -\frac{1}{2}\sin x\, e^{x}\,dx=\begin{pmatrix} u=\sin x & v=-\frac{1}{2}e^{x} \\ u'=\cos x & v'=-\frac{1}{2}e^{x}\end{pmatrix}$$

שוב אינ' בחלקים

$$=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x-\int -\frac{1}{2}e^{x}\cos x=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{x}\sin x+\frac{1}{2}e^{x}\cos x+\frac{1}{2}\int \sin x\, e^{x}\,dx+A$$

$$K_1=\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{e^{x}(\cos x-\sin x)}{4}+K_1$$

1 פל 3

באופן דומה:

$$C_2 = \int \frac{W_2(x)}{W_1(x)}\,dx = \ldots = -\frac{1}{20}e^{-3x}(\cos x + 3\sin x) + K_2$$

והפתרון הכללי הינו:

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{e^{-x}}\left(\frac{e^{x}(\cos x - \sin x)}{4} + K_1\right) + \underset{\substack{\uparrow \\ y_2}}{e^{3x}}\left(-\frac{e^{-3x}}{20}(\cos x + 3\sin x) + K_2\right) =$$

$$= \underbrace{K_1 e^{-x} + K_2 e^{3x}}_{y_g} + \underbrace{\frac{\cos x - 2\sin x}{5}}_{y_p}$$

ב. נחשב כנ"ל

$$W(1, e^{2x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x + 2e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -xe^{2x} - 2e^{3x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x + 2e^{x} \end{vmatrix} = x + 2e^{x}$$

$$C_1 = \int \frac{W_1}{W}\,dx = \ldots = -\frac{x^2}{4} - e^{x} + K_1$$

$$C_2 = \int \frac{W_2}{W}\,dx = \ldots = -\frac{e^{-2x}}{4}(x+1) - e^{-x} + K_2$$

והפתרון הסופי:

$$\boxed{y = \underbrace{K_1 + K_2 e^{2x}}_{y_g} \underbrace{- \frac{x^2}{4} - 2e^{x} - \frac{x}{4}}_{y_p}}$$

תרגיל: פתור את המד"ר $x^2y''+xy'=x^3$, העזר בכך

ש: $y_1=1$ ו- $y_2=\ln|x|$ פתרונות למד"ר ההומוג' הקשורה.

פתרון: נביא את המד"ר לצורה נורמלית (חשוב מאוד!)

$$y''+\frac{1}{x}y'=x$$

($x\neq 0$ אחרת אין מד"ר)

$$W=\begin{vmatrix}1 & \ln|x|\\ 0 & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}$$

$$W_1=\begin{vmatrix}0 & \ln|x|\\ x & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=-x\ln|x|\ ;\ W_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & x\end{vmatrix}=x$$

ולא x^3 !!

$$C_1=\int\frac{W_1}{W}dx=\int -x^2\ln x\,dx\overset{\text{אינט' בחלקים}}{=}-\frac{x^3}{3}\ln|x|+\frac{x^3}{9}+k_1$$

$$C_2=\int\frac{W_2}{W}dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+k_2$$

הפתרון הסופי: !!!

$$y=\underbrace{k_1+k_2\ln|x|}_{y_g}+\underbrace{\frac{x^3}{9}}_{y_p}$$

פונקציית גרין / George Green (בריט')

נניח נתונה בעיית קושי (מד"ר + תנאי התחלה)

$$\begin{cases}y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x)\\ y(x_0)=0\\ y'(x_0)=0\end{cases}$$

ושני פתרונות בת"ל y_1,y_2 למשוואה ההומוג' הקשורה.

הפתרון הוא:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\boxed{\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t)-y_2(t)y_1'(t)}}\,b(t)\,dt \longrightarrow \boxed{G(x,t)\ \text{פונקציית גרין}}$$

שימו לב שהמכנה הוא הורונסקיאן של y_1,y_2

תרגיל ממבחן (שאלה 2, מועד ב' תשע"א) שיר.

א: מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$

ב. מצא נוסחה לפתרון הבעיה $y''-2y'+y=f(x)\ ,\ y(0)=y'(0)=0$

ג. האם ניתן למצוא פתרון פרטי של המשוואה מסעיף א' ע"י שימוש בנוסחה מסעיף ב'?

פתרון: א. נתבונן במשוואה ההומוג' הקשורה $y''-2y'+y=0$

"ניתן לראות" ש $y_1=e^x$ פתרון (בהמשך נדע לפתור)

נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה ע"י הורדת סדר. נציב $y=e^x\cdot z$

$$y'=e^x\cdot z+e^x\cdot z' \quad , \quad y''=e^x\cdot z''+2e^x\cdot z'+e^x\cdot z$$

ע"י הצבה במשוו' המקורית נקבל:

$$e^x\cdot z''+\cancel{2e^x\cdot z'}+\cancel{e^x z}-\cancel{2e^x z'}-\cancel{2e^x z}+\cancel{e^x z}=\frac{e^x}{x}$$

$$\Rightarrow z''=\frac{1}{x} \Rightarrow z'=\ln|x|+C_1 \Rightarrow z=x\ln|x|-x+C_1x+C_2$$

$$\Rightarrow y=e^x\cdot z=\boxed{xe^x\ln|x|-xe^x+C_1xe^x+C_2e^x}$$:הפתרון הכללי

ב: מסעיף א' ניתן לראות כי $y_1=e^x$; $y_2=xe^x$ פתרונות עבור המשוואה ההומוגנית הקשורה;

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x)\end{vmatrix}=\ldots=e^{2x}$$

נחשב את פונק' גרין:

$$G(x,t)=\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{W(y_1(t),y_2(t))}=\frac{e^t xe^x-e^x te^t}{e^{2t}}=e^{x-t}(x-t)$$

ולכן הנוסחה תהיה:

$$\boxed{y(x)=\int_0^x e^{x-t}(x-t)f(t)\,dt}$$

← מת. התחלה

ג: נבדוק האם ניתן ע"י:

$$y\overset{?}{=}\int_0^x e^{x-t}(x-t)\cdot\frac{e^t}{t}\,dt=\int_0^x\frac{e^x(x-t)}{t}\,dt$$

מתבדר ולכן לא ניתן למצוא פתרון בשימוש בנוסחה.