תרגול 7 אינפי 3

16 בינואר 2015

החלפת סדר הגזירה:

תהא f פונקציה רציפה בסביבה D של הנקודה x^0 ב־$\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$.

נניח שעבור שני אינדקסים i, j הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ קיימת ב־D ורציפה ב־x^0, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$$

כלומר ניתן להחליף את סדר הגזירה.

ניתן דוגמה לפונקציה שנגזרותיה אינן מתחלפות. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נגזור לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

וכעת:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) = \lim_{r \to 0} \frac{f(t,r) - f(t,0)}{r} = \lim_{r \to 0} \frac{tr\frac{t^2-r^2}{t^2+r^2} - 0}{r} = t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t-0}{t} = 1$$

מצד שני,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

שוב, נחשב כל אחד מהביטויים במונה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \lim_{r\to 0}\frac{f(r,t) - f(0,t)}{r} = -t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{-t - 0}{t} = -1$$

ואכן אם נגזור לפי x ואז לפי y נקבל תוצאה אחרת מאשר אם נגזור לפי y ואז נגזור לפי x. חשבו איזה תנאי לא מתקיים כאן.

הגדרה:

תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, נגדיר את הנגזרת הכיוונית של f בכיוון h בנקודה a להיות:

$$D_h f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית, מתקיים:

$$D_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h$$

*הנגזרת הכיוונית בכיוון הגרדיאנט (המנורמל) היא המקסימלית.

כלומר, בכיוון זה הפונקציה עולה בקצב הגדול ביותר.

<u>תרגיל:</u>

בנקודה $a = (1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f(x,y,z) = xarctan(yz)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.
כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.

<u>פתרון:</u>

הנגזרות החלקיות של f הן:

$$f_x = arctan(yz)$$

$$f_y = \frac{xz}{1+(yz)^2}$$

$$f_z = \frac{yx}{1+(yz)^2}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בלכ נקודה ולכן f דיפרנציאבילית.
כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ולכן וקטור הכיוון של העלייה המקסימלית מאורך 1 יהיה:

$$h = \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|} = (0.743, 0.473, 0.473)$$

ומכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית בכיוון זה תהיה:

$$D_h f(a) = \nabla f(1,1,1) \cdot h = 1.056$$

<u>תרגיל:</u>

נתבונן בפונקציה $f(x,y,z) = xy^2z^3$. יהיו $h = (4,3,0)$ ו־$a = (3,2,1)$.

1. חשבו את הנגזרת של f בנקודה a לפי הווקטור h.

<u>פתרון:</u>

הנגזרת בכיוון הוקטור h שווה ל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(3+4t)(2+3t)^2 - 3\cdot 2^2}{t} = \lim_{t\to 0}(52+36t^2+51t) = 52$$

2. חשבו את הנגזרת בכיוון הוקטור h לפי וקטור מאורך 1.

<u>פתרון:</u>

ננרמל את הוקטור h:

$$\frac{h}{\|h\|} = \frac{1}{5}(4,3,1)$$

והנגזרת הכיוונית תהיה:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\frac{h}{\|h\|})-f(a)}{t} = \frac{52}{5}$$

שימו לב, מכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית הנגזרת הכיוונית היא בעצם העתקה ליניארית (מכפלה פנימית).

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה.

נסמן: $f(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$ כאשר כל f_i היא פונקציה סקלרית.

נגדיר את מטריצת יעקובי להיות:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

היעקוביאן הוא הדטרמיננטה של מטריצת היעקובי.

את מטריצת היעקובי של f בנקודה a נסמן $D_a(f)$ או $J_f(a)$.

כלל השרשרת:

אם f דיפרנציאבילית בנקודה x ו-g דיפרנציאבילית בנקודה $f(x)$ אזי:

$$J_a(f\circ g) = J_{g(a)}(f)J_a(g)$$

אם הפונקציה דיפרנציאבילית, מתקיים:

$$df_a(h) = J_f(a)h$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את $dg_a(h)$ עבור $g=\phi\circ f$, $a=(1,1)$, $h=(3,2)$ כאשר:

$$f(x,y) = (x^2+xy+1, y^2+2)$$

$$\phi(u,v)=(u+v,2u,v^2)$$

<u>פתרון:</u>

כל הרכיבים של שתי הפונקציות דיפרנציאביליים (כי הנגזרות החלקיות שלהם קיימות ורציפות), ולכן שתי הפונקציות דיפרנציאביליות וניתן להפעיל את כלל השרשרת.

$$J_\phi(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&2v\end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x+y&x\\0&2y\end{pmatrix}$$

בנקודה $(1,1)$מתקיים $f(1,1)=(3,3)$ ולכן סה"כ נקבל:

$$J_g(a)=J_\phi(f(a))J_f(a)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}$$

ומכיוון שהפונקצייה דיפרנציאבילית:

$$dg_a(h)=J_g(a)h=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\frac{1}{2}\\19\\6\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את מטרצית יעקובי בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $g=f\circ\phi$ כאשר:

$$\phi(x,y)=(\frac{1}{2}(e^y+cosx),\frac{1}{2}(e^x+cosy))$$

ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ומטריצת יעקובי שלה בנקודה היא $\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

שוב, קל לראות שהנגזרות החלקיות של כל הרכיבים קיימות ורציפות ולכן ϕ דיפרנציאבילית.

$\phi(0,0)=(1,1)$ ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת בנקודה $(0,0)$.

$$J_g(0,0)=J_f(1,1)J_\phi(0,0)=\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-sin0&e^0\\e^0&-sin0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$$

דוגמה שבה כלל השרשרת אינו מתקיים:

$x = 2t, y = t$ ו:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

עבור $t = 0$, למשל, $x = y = 0$ והנקודה המתאימה היא $(0,0)$. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = f_x(0,0) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + f_y(0,0) \cdot \frac{dy}{dt}(0)$$

אפשר לראות ש: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ולכן:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0$$

אך אם נסתכל על f כעל פונקציה של משתנה יחיד:

$$f(x,y) = f(2t,t) = \frac{4t^2 \cdot t}{4t^2 + t^2} = \frac{4}{5}t$$

ולכן: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4}{5}$ ובפרט:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = \frac{4}{5} \neq 0$$

זאת מכיוון שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, ולכן תנאי כלל השרשרת אינם מתקיימים.