

## תרגיל 6

1. יהיו  $R_1, \dots, R_n$  חוגים. אפיינו איך נראים האידיאלים הראשוניים ב- $R_1 \times \dots \times R_n$ .
2. הוכיחו/הפריכו: אם  $R$  חוג ראשוני ו- $S \subseteq R$  תת חוג, אז  $S$  חוג ראשוני.
3. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: יהיו  $R, S$  חוגים, ו- $\varphi: R \rightarrow S$  אפימורפיזם. אז:
  - (א) אם  $P \trianglelefteq S$  אידיאל ראשוני, אז  $\varphi^{-1}(P) \trianglelefteq R$  אידיאל ראשוני.
  - (ב) אם  $P \trianglelefteq R$  אידיאל ראשוני, אז  $\varphi(P) \trianglelefteq S$  אידיאל ראשוני.
4. יהי  $f: R \rightarrow S$  הומומורפיזם של חוגים קומוטטיביים (לא בהכרח על), ויהי  $I \trianglelefteq S$  אידיאל ראשוני. הוכיחו כי  $f^{-1}(I) \trianglelefteq R$  הוא אידיאל ראשוני.
5. יהי  $R$  חוג כך ש- $R[x]$  הוא חוג ראשוני. הוכיחו ש- $R$  ראשוני.
6. יהיו  $P_1, \dots, P_n$  אידיאלים ראשוניים בחוג  $R$ , ויהי  $I$  אידיאל שמקיים:  $I \subseteq \bigcup P_i$ . הוכיחו שקיים  $j$  כך ש- $I \subseteq P_j$ . (הדרכה: הוכיחו באינדוקציה. שימו לב שעבור איחוד של שני אידיאלים הטענה נכונה תמיד, גם בלי להניח ראשוניות).
7. יהי  $R$  חוג כלשהו. הוכיחו שחיתוך של שני אידיאלים מקסימליים שונים של  $R$  אינו אידיאל ראשוני.