אלגברה לינארית 2

תרגיל 2

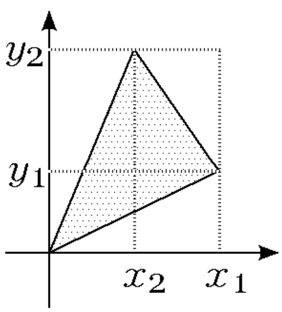
שאלה 1:

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. מטריצת סיבוב 3×3 כללית מעל $\mathbb{Z}_3$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, והוכח ששווה ל- $a+b+c$.

ב. המטריצה $A-\lambda I$ כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, והוכח שהיא מאפסת את הפולינום המתקבל, כאשר מציבים $\alpha I\in\mathbb{R}^{3\times3}$ במקום סקלר α.

שאלה 2:



א. חשב שטח משולש במישור שקודקודיו הם $\vec{0}=(0,0)$, $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)$.

הוכח שהוא שווה ל- $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$. לשם הפשטות, הניחו כי v_1,v_2 שניהם ברביע הראשון, וכן $x_2<x_1$ וגם $y_1<y_2$.

ב. הכלל את התוצאה שקיבלת למשולש כלשהו במישור.

כלומר בהינתן משולש כלשהו במישור שקודקודיו הם $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2), v_3=(x_3,y_3)$ הוכח כי שטחו שווה ל:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}\right|.$$

רמז: בצע הזזה של המישור ביחס לקודקוד v_1.

שאלה 3:

א. הוכח כי $\det\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ B & C^T \end{pmatrix}=|A|\cdot|C|$, כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}, B\in\mathbb{F}^{m\times n}, C\in\mathbb{F}^{m\times m}$.

ב. הוכח או הפרך: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |A|\cdot|D| - |B|\cdot|C|$.

ג. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

תזכורת: בהרצאה הוכחתם $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = |A|\cdot|C|$.

<u>שאלה 4:</u>

יהא n אי-זוגי, הוכח שאם $char(\mathbb{F}) \neq 2$ דטרמיננטה של כל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אנטי-סימטרית ($A = -A^T$) שווה ל- 0.

<u>שאלה 5:</u>

נגדיר $A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, ובאופן דומה נגדיר את A_n.

א. חשב את הדטרמיננטות של A_3, A_4.

ב. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n}.

ג. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n-1}, והסק מהם ערכי λ שעבורם היא הפיכה.

בהצלחה!