

תיקון לסוף שיעור קודם:

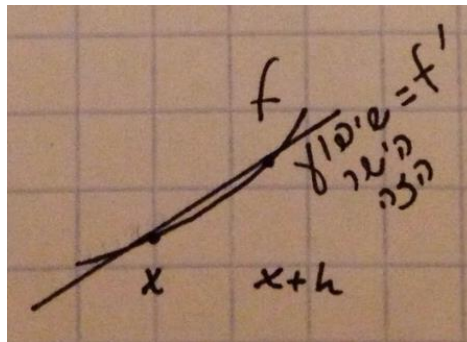
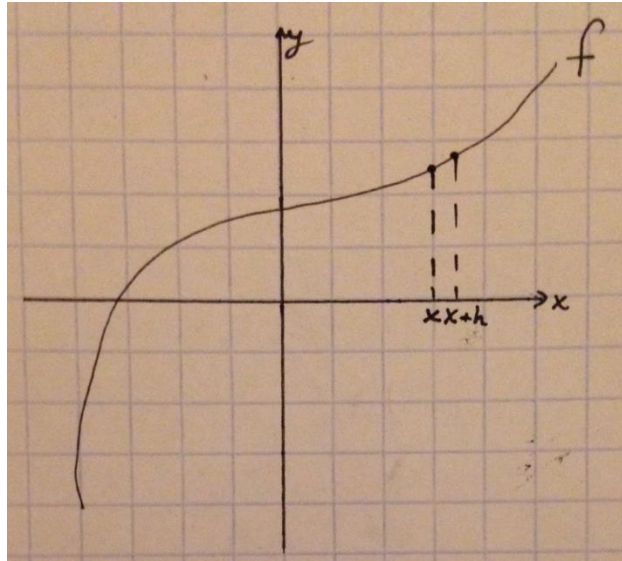
$e^x: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ולכן $\log x: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. שתיהן חד חד ערכיות, על (ממשפט ערך הביניים), רציפות, עולות.

נגזרות

הגדרה

תהי f מוגדרת בקטע סגור $[a, b]$ ותהי $a < x < b$. הנגזרת של f בנקודה x מוגדרת להיות היא הגבול:

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



גבול השיפועים כאשר $h \rightarrow 0$. "שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(x, f(x))$ "

הגדרה

f גזירה בנקודה x אם: יש $a < b$ כך ש- f מוגדרת ב- $[a, b]$, $a < x < b$, והנגזרת $f'(x)$ קיימת.

דוגמאות

פונקציה קבועה: $c' = 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$:x' = 1$$

$$\frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

$$(n \in \mathbb{N}) : (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\frac{\overbrace{(x+h) \cdots (x+h)}^{(x+h)^n} - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \overbrace{h^2(\dots)}^{\rightarrow 0}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} nx^{n-1}$$

$$: (\sin x)' = \cos x$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x + \sin h}{h} \stackrel{\cos h = 1 - 2 \sin^2 \frac{h}{2}}{=} \frac{1}{h} \sin x \underbrace{\left(-2 \sin^2 \frac{h}{2} \right)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{h}{2}} + \cos x \cdot \left(\frac{\sin h}{h} \right)^{\rightarrow 1}$$

$$\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

$$: (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{(\log(x+h) - \log x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \log \left(\frac{x+h}{x} \right) = \log \left(\left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right)$$

$$\left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \left(\left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e$$

עובדה: $(1+t)^{\frac{1}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} e$ (היה בשיעורי בית).

$$\log \left(\left(\frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}, \log \text{ מרציפות}$$

$$:(e^x)' = e^x$$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$\frac{\overbrace{e^h - 1}^t}{h} = \frac{t}{\log(1+t)}$$

$$t = e^h - 1$$

$$\log 1 + t = e^h$$

$$\log 1 + t = h$$

כאשר $0 \neq t = e^h - 1 \rightarrow 0, 0 \neq h \rightarrow 0$

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \frac{\log(1+t) - \log 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \log' 1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\log(1+t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

הערה

אם $y = f(x)$ פונקציה גזירה בכל הנקודות הפנימיות בקטע $[a, b]$, אז $f'(x)$ מוגדר לכל $a < x < b$, ונקבל פונקציה f' המוגדרת בקטע הפתוח (a, b) . מסמנים:

$$f'(x) = y' := \frac{dy}{dx} := \frac{df}{dx}$$

הערה

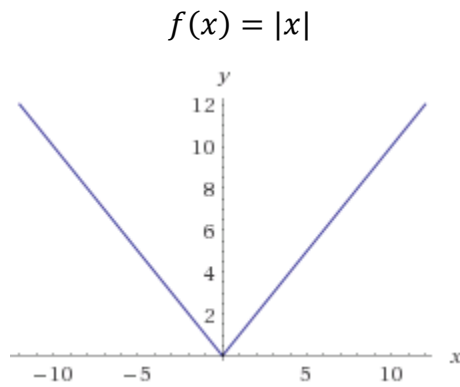
אם נגדיר נגזרת מימין ומשמאל בנקודה x :

$$f'_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(x) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

נקבל: f גזירה ב- $x \Leftrightarrow f'_-(x), f'_+(x)$ שווים וקיימים.

לוגמה



אינה גזירה ב-0.

כאן, מחישוב ישיר של הגבול $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$ למרות שהפונקציה רציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} .

למה

אם f גזירה בנקודה a , אז f רציפה בנקודה a .

הוכחה

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a) \\ \Rightarrow h \rightarrow 0 \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) &\rightarrow 0 \\ = f(a+h) - f(a) - h \rightarrow 0 \cdot f'(a) & \\ f(a+h) - f(a) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Leftarrow \\ \Rightarrow f(a+h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a) \end{aligned}$$

■

לכל הלמות הבאות, נניח ש- u, v פונקציות גזירות בנקודות בהן מחושבת הנגזרות.

למה

$$(u + v)' = u' + v'$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \frac{(u(x+h) + v(x+h)) - (u(x) + v(x))}{h} &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ \xrightarrow{h \rightarrow 0} u'(x) + v'(x) &\blacksquare \end{aligned}$$

למה

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

הוכחה

$$\begin{aligned} & \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \\ & \frac{1}{h} (u \cdot (x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)) \\ & = \frac{\overbrace{(u(x+h) - u(x))}^{h \rightarrow u'(x)}}{h} \cdot \overbrace{v(x+h)}^{X \text{ רציפה ב } v, h \rightarrow v(x)} + u(x) \cdot \frac{\overbrace{v(x+h) - v(x)}^{h \rightarrow v'(x)}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \blacksquare \end{aligned}$$

מסקנה

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

הוכחה

$$(cu)' = \underbrace{c'}_0 u + u'c = cu' \blacksquare$$

למה

אם $v \neq 0$ (לפחות בסביבה של x), אז:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

הוכחה

$$\frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h} = \frac{\overbrace{v(x) - v(x+h)}^{h \rightarrow -v'(x)}}{h} \cdot \frac{\overbrace{1}^{h \rightarrow v(x)}}{v(x+h) \cdot v(x)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-v'(x)}{v(x)^2} \blacksquare$$

מסקנה

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

הוכחה

$$\left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + \left(\frac{1}{v}\right)' \cdot u = \dots = \frac{u'v - v'u}{v^2} \blacksquare$$

למה

אם f הפיכה בסביבת a ו- $f'(a)$ קיימת ושונה מאפס ו- f^{-1} רציפה ב- $f(a) := b$ אז

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad (\text{מסמנים: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}})$$

הוכחה

נסמן $y := f(x)$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \stackrel{x \rightarrow a}{\rightarrow} \frac{1}{f'(a)}$$

$$(x: a + h, h := x - a)$$

$x := f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} f^{-1}(b) = a$ לכן b , רציפה ב- f^{-1}

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}, \text{ לכן,}$$

■

דוגמה

$$(e^x)' = (\log^{-1} x)' = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

כלל השרשרת

הנגזרת הפנימית

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot \overbrace{f'(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$