לינארית 1 הרצאה 8

<u>תזכורת:</u>

כמה טענות והגדרות שראינו על בת"ל ופורשת.

1. אם $v\notin sp\{v_1,\dots,v_n\}$ והקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, אז גם: $\{v_1,\dots,v_n,v\}$ בת"ל.

2. קבוצה בת"ל ופורשת נקראת בסיס. לכל מרחב וקטורי יש בסיס, אם יש קבוצה פורשת סופית אנו אומרים שהמרחב נוצר סופית; אנו מתמקדים במרחבים נוצרים סופית אלא אם נאמר אחרת במפורש.

3. אם A,B שני בסיסים של אותו מרחב V אז: $|A|=|B|$. עובדה זו מאפשרת לנו להגדיר את מושג המימד של מרחב וקטורי – $\dim V$ הוא הגודל של בסיס של V. ראינו ש:

$$\dim F^n=n,\quad \dim F_n\left[x\right]=n+1,\quad \dim F^{m\times n}=mn$$

4. קבוצה A היא בסיס אם ורק אם היא בת"ל מקסימלית אם ורק אם היא פורשת מינימלית.

לכן, למשל, הקבוצה $\mathbb{R}^{2\times 2}\supseteq\left\{\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right\}$ איננה פורשת, מכיוון ש: $\dim\mathbb{R}^{2\times2}=4$, ובקבוצה יש רק 3 איברים. פורשת

מינימלית ובת"ל מקסימלית הן מגודל 4.

5. אם C פורשת, אז קיים B בסיס שמוכל בה: $B \subseteq C$. במילים אחרות, כל קבוצה פורשת אפשר "לסנן" להיות גם בת"ל (מבלי לוותר על הפרישה).

באופן דומה, אם C בת"ל, אז קיים בסיס B שמכיל אותה: $C \subseteq B$. במילים אחרות, כל קבוצה בת"ל אפשר "להשלים" לבסיס - להוסיף לה וקטורים כך שתישאר בת"ל אך תהיה גם פורשת.

<u>משפט "השלישי חינם":</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $B \subseteq V$. אזי, כל שני תנאים מהרשימה הבאה גוררים את השלישי:

1. B בת"ל.
2. B פורשת.
3. $|B| = \dim V$ - הגודל של B הוא המימד של V.

למשל, שימוש במשפט - נניח שאנו רוצים לבדוק האם הקבוצה:
$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ היא בסיס.

לפי ההגדרה צריך לבדוק שהיא בת"ל ופורשת. לפי משפט השלישי חינם, מכיוון שהגודל של הקבוצה שווה למימד של המרחב, מספיק לבדוק רק בת"ל או רק פורשת, והתכונה הנוספת תבוא בחינם.

<u>טענה:</u>

טענה חשובה, כי היא חוסכת עבודה כשרוצים להוכיח כששני תתי-מרחבים $U, W \leq V$ הם שווים.

אם רוצים להוכיח ש: $U = W$, "לפי הספר" צריך להשתמש בהכלה דו-כיוונית.

טענה – יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F ו-$U, W \leq V$. אזי, אם $U \subseteq W \wedge \dim U = \dim W$ אז: $U = W$.

במקום להוכיח שתי הכלות, מספיקים הכלה אחת ושוויון בין המימדים.

<u>הוכחה:</u>

נתון ש: $U \subseteq W \wedge \dim U = \dim W$ וצ"ל: $U = W$.

נניח בשלילה ש: $U \neq W$. מכיוון ש: $U \subseteq W$ פירוש הדבר שקיים $w \in V$ כך ש: $w \in W \wedge w \notin U$.

יהי $U \supseteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס של U. בפרט, $sp\{u_1, \ldots, u_n\} = U$.

אם כן, $w \notin sp\{u_1, \ldots, u_n\}$. מכיוון ש-$\{u_1, \ldots, u_n\}$ בת"ל, לפי הטענה הראשונה שהזכרנו היום נקבל שגם: $\{u_1, \ldots, u_n, w\}$ בת"ל.

מצד אחד, $\dim U = n$.

מצד שני, הקבוצה $W \supseteq \{u_1, \ldots, u_n, w\}$ היא בת"ל. מכיוון שמימד הוא הגודל של בת"ל מקסימלית, $n + 1 \leq \dim W$.

סה"כ, $\dim U < \dim W$ וזו סתירה.

<u>דברים טכניים:</u>

המטרה היא להבין איך מוצאים בסיס לתת-מרחב, איך מוצאים בסיס לסכום של תתי-מרחבים ואיך מוצאים בסיס לחיתוך של תתי-מרחבים.

לשם כך, נזכור שיש 3 דרכים להציג מרחב וקטורי:

א. כמרחב נפרש, למשל:

$$U = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ב. כאוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית, למשל:

$$U = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^t = A\right\}$$

ג. כאיבר כללי, למשל:

$$U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>מציאת בסיס לתת-מרחב:</u>

מעבירים את המרחב להצגה כמרחב נפרש (איך? כבר נסביר). אחרי שכבר נתונה לנו קבוצה פורשת: $U = sp\left\{v_1, \ldots, v_k\right\}$, אנחנו צריכים "לסנן" אותה לבת"ל. איך? נשים את וקטורי הקבוצה הפורשת בשורות מטריצה ונדרג. בצורה המדורגת, השורות שלא התאפסו הן הבסיס - גם בת"ל וגם פורשת.

למשל, בדוגמה שלנו:

$$U = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נשים את המטריצות בשורות מטריצה ונדרג (נתרגם: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שורות נוספות לא תתאפסנה, ולכן השורות שנשארו הן בסיס – $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

<u>מעבר בין הצגות שונות של מרחב וקטורי – ממשוואות/איבר כללי למרחב נפרש:</u>

ראשית, אם נתונה לנו מערכת משוואות, נפתור אותה כדי לקבל הצגה כאיבר כללי.

למשל:

$$U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^t = A \right\}$$

אפשר לרשום:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b=c\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b-c=0\right\}$$

את הפתרון של המערכת (כלומר, $b=c$) נציב ונקבל איבר כללי:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$$

שנית, איך נעבור מאיבר כללי למרחב נפרש? לוקחים את האיבר הכללי ו"מפרקים לפי הסקלרים" – רושמים אותו כסכום שבכל אחד ממחובריו יש סקלר אחד, מוציאים את הסקלרים החוצה והאיברים הספציפיים שקיבלנו הם קבוצה פורשת. למשל, בדוגמה שלנו:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,d\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מציאת בסיס לסכום של תתי-מרחבים:

כדי למצוא בסיס לסכום של תתי-מרחבים:

1. מציגים את כולם כמרחב נפרש (במילים אחרות, מוצאים לכל אחד קבוצה פורשת).
2. את הוקטורים של כל הקבוצות הפורשות נשים בשורות אותה מטריצה, ונדרג.
3. השורות שלא התאפסו הן בסיס לסכום.

למשל, נמצא בסיס ל-$U+W$, כאשר:

$$U=sp\left\{(1,2,3,0),(-5,1,1,1)\right\},W=sp\left\{(0,6,-6,4),(-8,-5,-8,1)\right\}$$

נשים בשורות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \\ -8 & -5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_4+8R_1\to R_4}{\overset{R_2+5R_1\to R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & 16 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \\ 0 & 11 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_4-R_2\to R_4}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & 16 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שורות נוספות לא תתאפסנה, ולכן בסיס של הסכום הוא: $\left\{(1,2,3,0),(0,11,16,1),(0,6,-6,4)\right\}$.

משפט המימדים:

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו $U,W\leq V$. אזי:

$$\dim\left(U+W\right)=\dim W+\dim U-\dim\left(U\cap W\right)$$

מציאת בסיס לחיתוך של תתי-מרחבים:

אם המרחבים מוצגים כל אחד כאוסף פתרונות של מערכת הומוגנית,
החיתוך הוא אוסף הפתרונות של כל המשוואות של כולם בבת אחת.
למשל:

$$U=\left\{p\left(x\right)\in\mathbb{R}_3\left[x\right]:p\left(1\right)=0\right\}$$

$$W=\left\{p\left(x\right)\in\mathbb{R}_3\left[x\right]:p\left(0\right)=p'\left(0\right)\right\}$$

אזי:

$$U\cap W=\left\{p\left(x\right)\in\mathbb{R}_3\left[x\right]:\left\{\begin{array}{c}p\left(1\right)=0\\p\left(0\right)=p'\left(0\right)\end{array}\right.\right\}$$

מה נעשה כשהמרחב לא מוצג כאוסף פתרונות של מערכת הומוגנית?

מעבר ממרחב נפרש למשוואות:

אם U נתון כמרחב נפרש, כדי למצוא משוואות שמייצגות את U נשים את וקטורי U בעמודות מטריצה, בעמודה הנוספת נשים איבר כללי ונדרוש שיהיה פתרון. כלומר, כל שורת אפסים במטריצה, גם בעמודה הנוספת צריך להיות 0. המשוואות שנקבל הן המשוואות של U.

למשל, נציג את $sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ באמצעות משוואות – נשים בעמודות מול איבר כללי ונדרוש שיהיה פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&1&0&c\\0&0&1&d\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_2\to R_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&0&c-b\\0&0&1&d\end{array}\right)$$

שורות נוספות לא תתאפסנה. כדי שיהיה פתרון, נדרוש: $c-b=0$.
כלומר:

$$sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:c-b=0\right\}$$

<u>מרחבי המטריצה:</u>

תהי $A\in F^{m\times n}$ מטריצה.

1. מרחב האפס של המטריצה A מסומן $N\left(A\right)$, ומוגדר כך:

$$N\left(A\right)=\left\{x\in F^{n}:Ax=0\right\}$$

2. מרחב השורות של המטריצה A מסומן $R\left(A\right)$ ומוגדר כך: $R\left(A\right)=sp\left\{R_{1}\left(A\right),\ldots,R_{m}\left(A\right)\right\}\leq F^{n}$, כלומר המרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה A.

3. מרחב העמודות של המטריצה A מסומן $C\left(A\right)$ ומוגדר כך: $C\left(A\right)=sp\left\{C_{1}\left(A\right),\ldots,C_{n}\left(A\right)\right\}\leq F^{m}$, כלומר המרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה A.

למשל:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow R\left(A\right)=sp\left\{\left(1,2,3\right),\left(0,1,1\right)\right\}\leq F^{3}$$

$$C\left(A\right)=sp\left\{\left(1,0\right),\left(2,1\right),\left(3,1\right)\right\}\leq F^{2}$$

לפני שנתחיל, נזכיר איך נראים כפל שורה-שורה וכפל עמודה-עמודה:

$$R_{i}\left(AB\right)=R_{i}\left(A\right)B,\qquad\left(a_{1}\quad a_{2}\ldots a_{n}\right)B=a_{1}R_{1}\left(B\right)+\cdots+a_{n}R_{n}\left(B\right)$$

$$C_j\left(AB\right)=AC_j\left(B\right),\qquad A\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=b_1C_1\left(A\right)+\cdots+b_nC_n\left(A\right)$$

כמו כן, נשים לב ש: $C\left(A\right)=R\left(A^t\right),C\left(A^t\right)=R\left(A\right)$.

<u>טענה:</u>

תהיינה A,B מטריצות כך שהמכפלה AB מוגדרת. אזי:

$$C\left(AB\right)\subseteq C\left(A\right),\qquad R\left(AB\right)\subseteq R\left(B\right)$$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח ש: $R\left(AB\right)\subseteq R\left(B\right)$, ההוכחה של $C\left(AB\right)\subseteq C\left(A\right)$ דומה (עם כפל עמודה-עמודה).

יהי $v\in R\left(AB\right)$, צ"ל: $v\in R\left(B\right)$. כלומר, v הוא צירוף ליניארי של שורות AB וצ"ל ש-v הוא צירוף ליניארי של שורות B.

לפי כפל שורה-שורה, כל שורה של AB היא צירוף ליניארי של שורות B:

$$R_i\left(AB\right)=R_i\left(A\right)B\Longrightarrow\left(a_{i1}\quad a_{i2}\ldots a_{in}\right)B=a_{i1}R_1\left(B\right)+\cdots+a_{in}R_n\left(B\right)$$

לפי הנתון, קיימים סקלרים: $\beta_1,\ldots,\beta_n$ כך ש:

$$v=\beta_1R_1\left(AB\right)+\cdots+\beta_nR_n\left(AB\right)$$

ולכן:

$$v=\beta_1\left(a_{11}R_1\left(B\right)+\cdots+a_{1n}R_n\left(B\right)\right)+\cdots+\beta_n\left(a_{n1}R_1\left(B\right)+\cdots+a_{nn}R_n\left(B\right)\right)$$

ו-v אכן צירוף ליניארי של שורות B.

<u>טענה:</u>

תהי $A\in F^{m\times n}$ מטריצה. אזי, $\dim R\left(A\right)\leq\dim C\left(A\right)$.

לפני הוכחת הטענה, נתבונן במסקנה החשובה הבאה.

<u>מסקנה:</u> $\dim R\left(A\right)=\dim C\left(A\right)$.

נסביר. אנו יודעים שלכל מטריצה, המימד של מרחב השורות קטן-שווה מהמימד של מרחב העמודות. כלומר: $\dim R\left(A\right)\leq\dim C\left(A\right)$, וגם: $\dim R\left(A^t\right)\leq\dim C\left(A^t\right)$. כפי שהערנו, $C\left(A\right)=R\left(A^t\right),C\left(A^t\right)=R\left(A\right)$ ולכן:

$$\dim R\left(A\right)\leq\dim C\left(A\right)\wedge\dim C\left(A\right)\leq\dim R\left(A\right)$$

ואכן: $\dim R\left(A\right)=\dim C\left(A\right)$.

<u>הוכחת הטענה:</u>

נסמן: $\dim C\left(A\right)=k$, צ"ל: $\dim R\left(A\right)\leq k$. המימד הוא הגודל של פורשת מינימלית ולכן, כדי להראות ש: $\dim R\left(A\right)\leq k$, מספיק להראות

של-$R(A)$ יש קבוצה פורשת עם k איברים (או פחות).

יהי $\{v_1,\ldots,v_k\}$ בסיס של מרחב העמודות $C(A)$. נסמן ב-B את המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים $v_1,\ldots,v_k$, כלומר: $B=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$.

כל עמודה של A היא צירוף ליניארי של העמודות של B, כלומר לכל i קיימים סקלרים $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$ כך ש: $C_i(A)=\alpha_{i1}v_1+\cdots+\alpha_{ik}v_k$.

לפי כפל עמודה-עמודה, אפשר לרשום: $C_i(A)=B\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\ \vdots \\ \alpha_{ik}\end{pmatrix}$. אם נסמן את המטריצה שאיבריה הם α_{ij} ב-C, לפי כפל עמודה-עמודה נקבל שאפשר לרשום: $A=BC$.

לכן: $R(A)=R(BC)$, כפי שראינו $R(BC)\subseteq R(C)$ ולכן $R(A)\subseteq R(C)$.

למטריצה C יש k שורות. לכן, $\dim R(C)\le k$. מכיוון ש: $R(A)\subseteq R(C)$ נקבל שאכן: $\dim R(A)\le k$, כנדרש.

כעת, נוכל להגדיר את מושג הדרגה של מטריצה.

<u>דרגה של מטריצה:</u>

תהי A מטריצה. הדרגה של מטריצה מסומנת $rank(A)$ (או $r(A)$), והיא המימד של מרחב השורות של A:

$$rank(A)=\dim R(A)$$

לפי המשפט האחרון: $rank(A)=\dim C(A)$.

<u>טענה:</u>

1. $rank\left(AB\right)\leq rank\left(A\right),rank\left(B\right)$.
2. אם A הפיכה אז $rank\left(AB\right)=rank\left(B\right)$. כפל במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה.

<u>הוכחה:</u>

1. ראינו ש: $R\left(AB\right)\subseteq R\left(B\right)$ ולכן: $\dim R\left(AB\right)\leq\dim R\left(B\right)$, כלומר: $rank\left(AB\right)\leq rank\left(B\right)$.

ראינו ש: $C\left(AB\right)\subseteq C\left(A\right)$ ולכן: $\dim C\left(AB\right)\leq\dim C\left(A\right)$, כלומר: $rank\left(AB\right)\leq rank\left(A\right)$.

2. נתון ש-A הפיכה. מצד אחד, $rank\left(AB\right)\leq rank\left(B\right)$, לפי 1. מצד שני, אפשר לרשום: $B=IB=A^{-1}AB$ ולכן: $rank\left(B\right)=rank\left(A^{-1}AB\right)\leq rank\left(AB\right)$, שוב לפי 1.

<u>טענה:</u>

למטריצות שקולות שורה יש את אותו מרחב שורות. בפרט, $R\left(A\right)=R\left(CF\left(A\right)\right)$, כאשר $CF\left(A\right)$ היא הצורה הקנונית של A.

<u>הוכחה:</u>

תהיינה A,B מטריצות כאשר B מתקבלת מ-A ע"י פעולות שורה.

כפי שראינו בהרצאה 4, אפשר להחליף פעולות שורה בכפל במטריצה הפיכה, כלומר קיימת P הפיכה כך ש: $B=PA$.

מצד אחד, לפי הטענה הקודמת סעיף 2, $rank\left(A\right)=rank\left(PA\right)=rank\left(B\right)$, כלומר: $\dim R\left(A\right)=\dim R\left(B\right)$.

מצד שני, ראינו ש: $R\left(B\right)=R\left(PA\right)\subseteq R\left(A\right)$.

סה"כ: $R(B) \subseteq R(A) \wedge \dim R(A) = \dim R(B)$ ולכן: $R(A) = R(B)$.

<u>נשים לב:</u>

אם רוצים למצוא בסיס למרחב השורות, צריך לדרג; השורות שלא התאפסו הן בסיס למרחב השורות.

לכן, הדרגה של A שווה למספר השורות שלא מתאפסות בצורה מדורגת.

מספר השורות שלא מתאפסות בצורה המדורגת שווה למספר המשתנים התלויים – בצורה המדורגת, שורה שלא מתאפסת משמעה עמודה שיש בה איבר מוביל; מכיוון שהצורה מדורגת, האיברים המובילים בכל שורה נמצאים בעמודות שונות, ולכן מספר השורות שלא מתאפסות שווה למספר העמודות שבהן יש איבר מוביל, וזהו מספר המשתנים התלויים.

על מספר המשתנים התלויים אפשר לחשוב כעל מספר העמודות (שבד"כ מסומן ב-n) פחות מספר המשתנים החופשיים.

בשורה התחתונה, $rank(A)$ הוא מספר העמודות פחות מספר המשתנים החופשיים.

כבר נסביר שמספר המשתנים החופשיים הוא $\dim N(A)$, ונוכל להסיק:

$$\dim N(A) + rank(A) = n$$

למה $\dim N(A)$ הוא מספר המשתנים החופשיים? למשל, נתבונן במטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

במטריצה A יש משתנה חופשי אחד – z.

מהו $N\left(A\right)$? אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית, כלומר:

$$N\left(A\right)=\left\{\left(x,y,z\right):\left\{\begin{array}{c}x+z=0\\y=0\end{array}\right.\right\}=\left\{\left(-z,0,z\right):z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{z\left(-1,0,1\right):z\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{\left(-1,0,1\right)\right\}$$

כלומר, $\left\{\left(-1,0,1\right)\right\}$ בסיס ל-$N\left(A\right)$ ולכן: $\dim N\left(A\right)=1$, כמו מספר המשתנים החופשיים.

אינטואיטיבית, כל משתנה חופשי "תורם" וקטור לקבוצה הפורשת של $N\left(A\right)$; עדיין מדובר בקבוצה פורשת, עוד לא בטוח שזהו בסיס.