

## פתרון תרגיל בית 7

### שאלה 1

חשב את האינטגרלים הבאים, או הוכח שאינם קיימים:

$$\begin{array}{lll} \int_0^{\infty} \cos x dx & \text{ג.} & \int_0^{\infty} x e^{-x} dx & \text{ב.} & \int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx & \text{א.} \\ \int_2^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} & \text{ו.} & \int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx & \text{ה.} & \int_{-\infty}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & \text{ד.} \end{array}$$

### פתרון שאלה 1

#### סעיף א

$$\int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx$$

$$\frac{x+1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$$x+1 = A \cdot x(1-x) + B(1-x) + Cx^2$$

$$x=0: 1=B$$

$$x=1: 2=C$$

$$x=-1: 0=-2A+2+2 \Rightarrow A=2$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{1-x} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 \ln|b| - \frac{1}{b} - 2 \ln|b-1| \right) - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} + 2 \ln|1| = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{b}{b-1} \right| - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{1}{1-b} \right| - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

#### סעיף ב

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad \text{נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים} \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} \quad \begin{array}{l} v = -e^{-x} \quad u = x \\ v' = e^{-x} \quad u' = 1 \end{array}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left[ -x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -b e^{-b} - e^{-b} + 1 \right] = 1$$

#### סעיף ג

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = [\sin x]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$$

מתבדר.

### סעיף ז

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{e^b}^e \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} [\arctg(t)]_{e^b}^e = \arctg(e) - \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctg(e^b) = \arctg(e)$$

$\begin{matrix} dt=e^x dx \\ x=1 \rightarrow t=e \\ x=b \rightarrow t=e^b \end{matrix}$

### סעיף ה

$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx$  נחשב את האינטגרל הלא מסוים

נציב  $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

$$\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos x^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^0 x \sin x^2 dx + \int_0^{\infty} x \sin x^2 dx$$

מספיק להראות ש  $\int_0^{\infty} x \sin x^2 dx$  מתבדר כדי להראות שכל האינטגרל מתבדר.

$$\int_0^{\infty} x \sin x^2 dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos x^2 \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{1}{2} \right]$$

### סעיף ו

$$\int_2^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b 4x^3 dx \cdot (x^4-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{(x^4-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} \right]_2^b =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{b^2-1} - 2\sqrt{15} = \infty$$

מתבדר

### שאלה 2

בדוק בעזרת מבחן ההשוואה הראשון האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א.  $\int_1^{\infty} x^{-x} dx$     ב.  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx$     ג.  $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$     ד.  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

### פתרון שאלה 2

**הערה:** שימו לב: בכל האינטגרליים  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  מתקיים התנאי  $f(x) \geq 0$  לכל  $a \leq x$

### סעיף א

מכיוון שהאינטגרל  $\int_1^2 x^{-x} dx$  קיים וסופי, מספיק להראות ש

$$\int_1^{\infty} x^{-x} dx = \int_1^2 x^{-x} dx + \int_2^{\infty} x^{-x} dx$$

מתכנס.

לכל  $2 \leq x$  מתקיים  $\frac{1}{x^x} \leq \frac{1}{x^2}$ . מכיוון ש  $\int_2^{\infty} x^{-2} dx$  מתכנס נקבל ממבחן ההשוואה הראשון שגם האינטגרל  $\int_2^{\infty} x^{-x} dx$  מתכנס.

### סעיף ב

$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx$   
 לכל  $1 \leq x$  מתקיים  $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$  ולכן  $\frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} \leq \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)}$  לכל  $1 \leq x$ .  
 ממבחן ההשוואה הראשון מספיק להראות ש  $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)} dx$  מתכנס.  
 מכיוון ש  $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx$  מספיק להוכיח ש  
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx$  מתכנס. נציב  $t = \ln(x+1) \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{x+1}$   
 מכיוון ש  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) = \infty$  נקבל ש  $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$  מתכנס.  
 מכיוון ש  $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$  מתכנס נקבל ש  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx$  מתכנס.

### סעיף ג

$\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$  מכיוון ש  $-1 \leq \sin x$  נקבל ש  $1 \leq 2 + \sin x$   $\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x}$   
 מכיוון ש  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  מתבדר נקבל גם ש  $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$  מתבדר.

### סעיף ד

$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  מכיוון ש  $\sin^2 x \leq 1$  נקבל ש  $\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ .  
 מכיוון ש  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  מתכנס גם  $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$  מתכנס.

### שאלה 3

בדוק בעזרת מבחן המנה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א.  $\int_2^{\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}} dx$  ב.  $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$  ג.  $\int_1^{\infty} \frac{x^4+1}{x^5+3x^2+6} dx$  ד.  $\int_1^{\infty} (\ln(1+e^x) - x) dx$

### פתרון שאלה 3

#### סעיף א

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x^5-3x}} = 1$ . מתכנס.  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

## סעיף ב

נשים לב תחילה שעבור  $0 \leq \alpha \leq \pi$  ולכן עבור  $1 \leq x$  נקבל ש  $0 \leq \sin \frac{1}{x}$ .

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ מתבדר. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ וממבחן המנה } \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ מתבדר.}$$

## סעיף ג

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ מתבדר. נשים לב ש } \int_1^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 + 6} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 + 6} : \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x}{x^5 + 3x^2 + 6} = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 + 6} dx \text{ מתבדר.}$$

## סעיף ד

$$\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln e^x = \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln(e^{-x} + 1) \text{ נשים לב ש } \int_1^{\infty} (\ln(1 + e^x) - x) dx$$

$$\text{ראינו ש } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס. נחשב את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{\frac{1}{x^2}} \text{ מכלל לופיטל נקבל}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{-x}}{2(e^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2(1 + e^x)} = 0$$

$$\int_1^{\infty} (\ln(1 + e^x) - x) dx \text{ מתכנס גם } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ שמהתכנסות}$$

## שאלה 4

הוכח כי האינטגרל  $\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  עבור  $a > 0$  מתכנס לכל  $\alpha > 0$ .

## פתרון

$$\text{נסמן: } f(x) = \sin x \text{ ו } g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$f(x)$  ו  $g(x)$  אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$  לכל  $b > a$  (כי נתון  $a > 0$ ).

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\infty} \sin x dx \right| = \left| \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \sin x dx \right| = \left| \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_a^b \right| = \left| -\lim_{b \rightarrow \infty} \cos b + \cos a \right| \leq 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ היא פונקציה מונוטונית ומקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

לפי מבחן דריכלה  $\Leftrightarrow \int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  מתכנס.

## שאלה 5

הוכח או הפוך: אם  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  מתכנס, אזי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

### פתרון

הדוגמה הנ"ל מראה שאם  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  מתכנס, אזי לא בהכרח  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

נסתכל על הפונקציה  $f(x) = \sin(x^2)$ .

הגבול לא קיים  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x^2) \rightarrow$

נסתכל על  $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$

$$(*) \int \sin(x^2) dx \stackrel{\substack{x^2=t \\ x=\sqrt{t} \\ dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}}{=} \int \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}} dt \rightarrow \text{לפי שאלה 4 האינטגרל מתכנס}$$

## שאלה 6

הוכח כי  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < 1 + \frac{\pi}{4}$

### פתרון

תחילה נשים לב ש

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4}$$

מכיוון ש  $x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 \geq 0$  לכל  $x$  נקבל ש

$$1 + x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 \geq 1$$

ולכן  $\frac{1}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} \leq 1$  ואז

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} \leq \int_0^1 dx = 1$$

מכיוון ש  $\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3 > 1$

(ניתן לקבל זאת ע"י חקירת הפונקציה  $f(x) = \sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3$  נקבל ש

$$1 + x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 > 1 + x^2$$

ואז  $\frac{1}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$