פתרון תרגיל בית 2 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא חבורה למחצה? האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה? האם היא חבורה? האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{Z},*)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.

ב. $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(2\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ד. $(\mathbb{R},*)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a*b=\sqrt{a+b}$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$$

ו. $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריציות.

ז. $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},\circ)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a\circ b=a+b+ab$. רמז: קודם הוכיחו שזו פעולה סגורה.

פתרון. לא נציין מפורשות בכל סעיף שאם מבנה אלגברי הוא חבורה, אז הוא גם מונואיד, ולכן גם אגודה. ולהפך, אם הוא לא אגודה, אז ודאי שהוא גם לא מונואיד וכו'.

א. מבנה זה הוא חבורה. ישנה סגירות, כי לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים כי $a+b+2\in\mathbb{Z}$. הפעולה קיבוצית כי $(a*b)*c=a+b+c+4=a*(b*c)$. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. איבר היחידה הוא $e=-2$. האיבר ההופכי של a הוא $-a-4$.

ב. הסגירות של הפעולה ברורה. הפעולה קיבוצית כי

$$\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\}=\max\{a,\max\{b,c\}\}$$

איבר היחידה הוא 1 כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\max\{n,1\}=\max\{1,n\}=n$. אין הפיך לאף איבר פרט ל-1, ולכן מדובר במונואיד. הפעולה חילופית.

ג. הפעולה סגורה כי כפל של מספרים שלמים זוגיים הוא שלם זוגי. הפעולה קיבוצית כי פעולת הכפל הרגילה של מספרים היא קיבוצית. לא קיים איבר יחידה, שכן אם $a\in 2\mathbb{Z}$ היה איבר יחידה אז יתקיים $2\cdot a=2$, ונקבל כי $a=1\notin 2\mathbb{Z}$. לכן מבנה זה הוא אגודה.

ד. הפעולה לא סגורה, למשל $0*-1=\sqrt{0-1}\notin\mathbb{R}$. גם אילו הקבוצה הייתה $\mathbb{C}$, אפשר לשים לב שהפעולה אינה קיבוצית. לכן $(\mathbb{R},*)$ אינה אגודה. הפעולה חילופית.

ה. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\notin A$$

ולכן לא מדובר באגודה. הפעולה חילופית.

ו. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\-d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd & bc+ad\\-(bc+ad) & ac-bd\end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2+b^2>0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

ז. ברור שעבור $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ נקבל $a\circ b\in\mathbb{R}$. כדי להוכיח סגירות צריך להראות כי $a\circ b\neq -1$. נניח בשלילה $a+b+ab=-1$, ואז נעביר אגפים לקבל $a(1+b)=-1-b$, נצמצם את $1+b$ (שהרי $b\neq -1$) ונקבל $a=-1$ וזו סתירה.
את קיבוציות הפעולה נוכיח באופן ישיר

$$\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(a+b+ab)\circ c=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)\,c\\&=a+b+c+ab+bc+ac+abc\\&=a+(b+c+bc)+a\,(b+c+bc)=a\circ(b+c+bc)=a\circ(b\circ c)\end{aligned}$$

הפעולה היא חילופית

$$a\circ b=a+b+ab=b+a+ba=b\circ a$$

ולכן כדי למצוא איבר יחידה מספיק למצוא איבר e כך ש- $a\circ e=a$. כלומר $a+e+ae=a$, לכן $e(1+a)=0$, נחלק ב-$(1+a)$ שהרי $a\neq -1$ ונקבל כי $e=0$ הוא איבר היחידה.
לכל איבר $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ נמצא הופכי x לפי $a\circ x=a+x+ax=0$. נפתור עבור x ונקבל $x=\frac{-a}{1+a}$ (שוב החלוקה מותרת כי $a\neq -1$). כלומר כל איבר הוא הפיך וקיבלנו כי $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},\circ)$ היא חבורה.

שאלה 2. תהי G חבורה. הוכיחו כי G היא אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.

פתרון. לכל זוג איברים $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^2=abab=aabb=a^2b^2$. נכפיל משמאל ב-a^{-1} ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1}=ba=ab=a^{-1}aabbb^{-1}$$

כלומר $ba=ab$.

שאלה 3. יהי M מונואיד שבו כל איבר הפיך מימין. הוכיחו או הפריכו: M הוא חבורה.

פתרון. כדי להוכיח מספיק להראות כי כל איבר ב-M הוא הפיך. יהי $a \in M$, ולפי הנתון בשאלה הוא הפיך מימין. כלומר קיים $b \in M$ כך ש-$ab = e$. גם b הפיך מימין, ולכן קיים $c \in M$ כך ש-$bc = e$. נשים לב כי

$$a = a \cdot e = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = e \cdot c = c$$

וקיבלנו כי $ab = bc = ba = e$. כלומר b הוא ההופכי של a.

שאלה 4. תהי קבוצה $S = \{a, b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S, *)$ היא:

א. אגודה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

פתרון. א. ניתן שתי אפשרויות (שהן היחידות עד כדי שקילות): האחת היא

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

שלעיתים נקראת "אגודת האפס" (Null semigroup) על שני איברים. השנייה היא

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

אגודת אפס משמאל (left zero semigroup), כלומר לכל $x, y \in S$ מתקיים $xy = x$.

ב.

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

זו טבלת הכפל של $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ כאשר $a = 0, b = 1$. זו למעשה גם טבלת האמת של הקשר הלוגי "וגם", כאשר $a = F, b = T$. איבר היחידה הוא b.

ג.

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

במקרה זה a הוא איבר היחידה. האיבר b הוא ההופכי של עצמו. זו בדיוק טבלת הכפל של $(\mathbb{Z}_2, +)$ כאשר $a = 0, b = 1$.