פתרון תרגיל 9 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תשע"ח

שאלה 1.

א.נחשב לפי חילוק פולינומים כפי שנלמד בתרגול ונקבל:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 3x + 7)(x^2 - x - 1) + (14x + 12)$$

ב. שקול לבעיה בה $g(x)= x^2 + x + 1$,$f(x)= x^4 + x^2 + 1$

אחרי חישוב נקבל: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 1)$

שאלה 2.

א. מס' העמודות המינימלי שסכומן הוא 0 הוא 3 (לדוגמה:ראשונה,שניה ורביעית) ולכן $d_{min} \leq 3$

אין עמודות זהות או עמודות שהן 0 ולכן $d_{min} \geq 3$. סה"כ 3.

ב. לזהות 2 ולתקן 1.

סעיף ג.

א. נכפול H*v1 ונקבל $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן הטעות נפלה במקום השני בוקטור ולכן הוקטור הנכון הוא (0 0 0 0 0)

ב. נכפול H*v2 ונקבל $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ולכן הוקטור שקיבלנו תקין.

ג. נכפול H*v3 ונקבל $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ולכן הטעות נפלה במקום הרביעי והוקטור הנכון הוא

(0 1 1 0 1)

שאלה 4.

פיתרון: יהיו $x, y \in R$. לפי דיסטריבוטיביות, $(x-y)^2 = x^2 - xy + yx - y^2$. מצד אחד מתקיים $x^2 - xy + yx - y^2 = x - xy + yx - y$. מצד שני מתקיים $(x-y)^2 = x - y$, ולכן $x - xy + yx - y = x - y$, משמע $xy = yx$.

שאלה 5.

א. נוכיח רק את חוק הבליעה (כמובן שצריך להראות גם ש-K היא תחת חבורה חיבורית של R[x])

יהיו $g\in R[x]$ ו-$f\in K$ צ"ל $fg\in K$ ואכן $(gf)(137)=g(137)*f(137)=g(137)*0=0$

ב. לא אידיאל כי זו לא ת"ח חיבורית.

שאלה 6.

פיתרון: סעיף א נכון. לכל $a,b\in I$,

$(1-a)(1-b)=1-a-b+ab=1-(a+b-ab)$, אבל $a+b-ab\in I$ ולכן

$(1-a)(1-b)\in\{1-a:a\in I\}$.

סעיף ב. הוכחה:

ברור $\cup I_n\neq\emptyset$ כי I_1 לא ריק. יהיו $x,y\in\cup I_n$ אזי קיימים $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש-$y\in I_m, x\in I_n$. בלי הגבלת הכלליות

$n<m$ ולכן $I_n\subseteq I_m$ ואז $x,y\in I_m$. מתקיים:

$x-y\in I_m\subseteq\cup I_n$.

נראה גם את חוק הבליעה:

לכל $r\in R$ מתקיים $rx\in I_m\subseteq\cup I_n$

סעיף ג.

אין חוג, משום שאין סגירות לכפל, למשל $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\notin A$.