משפט: תהי A קבוצה סדורה היטב. קיים סודר α כך ש$A \cong \alpha$.

הערה: למעשה, A איזומורפית לסודר יחיד, כי אם $A \cong \alpha$ וגם $A \cong \beta$ אז $\alpha \cong \beta$, וראינו בשיעור הקודם ששני סודרים איזומורפיים סדר אמ"ם הם שווים.

הוכחת המשפט: נסתכל על כל הזוגות מהצורה (a, α) כך ש$a \in A$, α סודר, ו$a \downarrow \cong \alpha$.

למשל, בגלל שA סדורה היטב יש בה איבר ראשון, נקרא לו a'. אז יהיה לנו את הזוג $(a', 0)$.

נקרא לקבוצה הזאת F.

נשים לב שF היא "יחס". (לא באמת, כי זה תת קבוצה של $A \times ON$ וON היא לא קבוצה) אבל נשתמש באותם מינוחים.

1. **F חד ערכית.**

הוכחה: אם $(a, \alpha) \in F, (a, \beta) \in F$ אז $\alpha \cong a \downarrow \cong \beta$ לכן $\alpha \cong \beta$ וזה גורר שהם שווים.

2. **F חח"ע**

הוכחה: נניח ש$(a, \alpha) \in F, (b, \alpha) \in F$ אם $a \neq b$ אז אחד מהם קטן מהשני (כי הקבוצה סדורה קווית) בה"כ $a < b$. אז $a \downarrow$ היא רישא נאותה ב$b \downarrow$. (כי $a \in b \downarrow \setminus a \downarrow$). רישא נאותה של קבוצה סדורה היטב לא איזומורפית סדר לקבוצה. לכן לא ייתכן שגם $a \downarrow$ וגם $b \downarrow$ איזומורפיות סדר לα, כי אז איזומורפיות סדר בינהן. לכן $a = b$.

3. $dom(F)$ **הוא רישא של** A

נניח ש$a \in dom(F)$ ו$b < a$. זה אומר שיש סודר α כך ש$a \downarrow \cong \alpha$.

$$f : a \downarrow \to \alpha.$$

$b \in a \downarrow$. לכן $f(b) \in \alpha$. בשיעור הקודם הוכחנו שאם A ו B קבוצות סדורות, ו$f : A \to B$ איזו' סדר ו$a \in A$, אז

$$a \downarrow \cong f(a) \downarrow$$

לכן במקרה שלנו,

$$b \downarrow \cong f(b) \downarrow$$

אבל $f(b) \in \alpha$, וידוע שכל איבר של סודר הוא סודר, והוא שווה לרישא שנוצרת על ידו. כלומר, $f(b) \downarrow = f(b)$. לכן $(b, f(b)) \in F$.

4. F **שומרת סדר**

הסבר: למעשה ראינו את זה בהוכחה של סעיף 3. כי ראינו שאם $b < a$, ו(a, α) אז $(b, f(b))$ כאשר $f(b) \in \alpha$, כלומר $f(b) < \alpha$.

5. $Im(F)$ **היא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים.**

הוכחה: צריך להוכיח שאם $\beta \in \alpha \in Im(F)$, אז $\beta \in Im(F)$.

$\alpha \in Im(F)$ זה אומר שקיים $a \in A$, כך ש$a \downarrow \cong \alpha$.

$$f : \alpha \to a \downarrow$$

$\beta \in \alpha$ ולכן $f(\beta) \in a \downarrow$, וכמו שכבר ראינו, זה גורר ש

$$\beta \downarrow \cong f(\beta) \downarrow$$

וכן, $\beta\downarrow=\beta$.
וכמובן ש$f(\beta)\in A$כלומר,

$$(f(\beta),\beta)\in F$$

לכן $\beta\in Im(F)$
6. $Im(F)$ **היא סודר**
הוכחה: קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.
נקרא לו α.
7. $dom(F)=A$
הוכחה: אחרת, זה רישא נאותה. לכן היא נקבעת ע"י איבר. (כל רישא נאותה בקבוצה סדורה היטב היא ראשית).

$$dom(F)=a\downarrow$$

נשים לב שF היא בעצם פונקציה מ$dom(F)$ ל$Im(F)$, וראינו שהיא חח"ע ושומרת סדר, (וכמובן שהיא על התמונה), לכן היא איזו סדר מ$dom(F)$ ל$\alpha=Im(F)$. זה אומר ש $(a,\alpha)\in F$. כלומר, $a\in dom(F)=a\downarrow$, סתירה.
8. $\alpha=Im(F)\cong A$**. כלומר,** A **איזומורפית סדר לסודר.**
הוכחה: כמו בסעיף 7, F בעצמה היא האיזומורפיזם סדר.
מסקנה: כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית סדר לסודר יחיד. הסודר הזה נקרא "טיפוס הסדר" של הקבוצה. מסמנים:

$$otp(A)$$

ארתמטיקה של סודרים

יהיו α,β סודרים. נגדיר

$$\alpha\oplus\beta=\alpha\times\{0\}\cup\beta\times\{1\}$$

על הקבוצה הזאת נגדיר יחס סדר:

$$(a,b)<(c,d)$$

אם $b<d$ אם $b=d\wedge a<c$.
טענה: זאת קבוצה סדורה היטב.
הוכחה: עשיתם בש"ב.
מסקנה: $\alpha\oplus\beta$ איזומורפית סדר לסודר יחיד.

סימון:

$$\alpha+\beta=otp(\alpha\oplus\beta)$$

דוגמאות:
1. הגדרנו כבר בעבר מה זה $\alpha+1$, כלומר $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.
מכיוון ש1 הוא סודר, הבאנו עכשיו הגדרה חדשה לסודר $\alpha+1$.
ראיתם בתרגול שההגדרות האלה מתלכדות.
2. $1+\omega=\omega$.
נבנה איזו סדר מ$1\oplus\omega$ לω.

$$1\oplus\omega=(0,0)\cup\{(n,1)\}_{n\in\omega}$$

$$f(0,0)\to 0$$

$$f(n,1)\to n+1$$

קל לראות שזה איזו' סדר.
מסקנה: חיבור סודרים אינו קומוטטבי, כי למשל

$$1+\omega=\omega\neq s(\omega)=\omega+1$$

תכונות:
1. $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
2. אם $\alpha+\beta_1=\alpha+\beta_2$ אז $\beta_1=\beta_2$
3. אם $\beta_1<\beta_2$ אז $\alpha+\beta_1<\alpha+\beta_2$
4. אסוציאטיביות. כלומר, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

הוכחות:
1.

$$\alpha+0=otp(\alpha\oplus 0)$$

כזכור, $\emptyset=0$. לכן $\alpha\oplus 0=\alpha\times\{0\}$. $\alpha\times\{0\}\cong\alpha$.

$$0+\alpha=otp(0\oplus\alpha)=otp(\alpha\times\{1\})=\alpha$$

2.

$$\alpha+\beta_1=otp(\alpha\times\{0\}\cup\beta_1\times\{1\})$$

$$\alpha+\beta_2=(\alpha\times\{0\}\cup\beta_2\times\{1\})$$

לפי הנתון, יש איזו סדר

$$f : \alpha \times \{0\} \cup \beta_1 \times \{1\} \to \alpha \times \{0\} \cup \beta_2 \times \{1\}$$

איזו סדר מעביר רישא לרישא. נשים לב ש$\alpha \times \{0\}$ הוא רישא בשניהם, והוא איזומורפי לα.
כלומר, לשתי הקבוצות יש רישא שאיזומורפית לα.
$f[\alpha \times 0]$ היא רישא בקבוצה $\alpha \times \{0\} \cup \beta_2 \times \{1\}$. (כי איזו סדר שולח רישא לרישא). מכיוון ש$\alpha \cong \alpha \times \{0\}$, אז $\alpha \cong f[\alpha \times \{0\}]$. יש לנו שתי רישות ב$\alpha \times \{0\} \cup \beta_2 \times \{1\}$, אז או שהן שוות, או שאחת מוכלת ממש בשניה.
אבל שתיהן איזומורפיות לα. לא ייתכן ריזא אחת שמוכלת ממש ברישא אחרת, ושתיהן איזומורפיות סדר אחת לשניה (קבוצה סדורה היטב לא איזומורפית סדר לרישא נאותה שלה).
לכן הן חייבות להיות שוות. כלומר, f מעבירה את $\alpha \times \{0\}$ ל$\alpha \times \{0\}$, ולכן היא מעבירה את $\beta_1 \times \{1\} \to \beta_2 \times \{1\}$, צמצום של איזו סדר הוא איזו סדר,ף לכן קיבלנו איזו סדר מ$\beta_1 \times \{1\}$ ל$\beta_2 \times \{1\}$, ולכן $\beta_1 \cong \beta_2$ גורר ש$\beta_1 = \beta_2$.
3. $\beta_1 < \beta_2$ זה אומר שβ_1 הוא רישא ממש בβ_2.

$$\alpha \times \{0\} \cup \beta_1 \times \{1\}$$

היא רישא ממש בקבוצה

$$\alpha \times \{0\} \times \beta_2 \times \{1\}$$

לכן אם $\alpha \times \{0\} \cup \beta_2 \times \{1\}$ איזומורפי לסודר γ, אז האיזו סדר שולח רישא נאותה לרישא נאותה, ורישא של סודר היא סודר שקטן ממנו. כלומר,

$$\alpha \times \{0\} \cup \beta_1 \times \{1\} \cong \delta < \gamma$$

.4

$$(\alpha + \beta) + \gamma = otp((\alpha + \beta) \oplus \gamma)$$

$$(\alpha + \beta) \oplus \gamma \cong (\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}) \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) \cong \alpha \times \{0\} \cup (\beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) \times \{1\}$$

צריך לבנות איזו סדר בין שתי הקבוצות. זה לא מסובך. נסו בבית.
הערה: שתי הקבוצות איזומורפיות סדר לקבוצה

$$\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \gamma \times \{2\}$$

עם הסדר שאתם חושבים שזה אומר.
הערות:

1. אם $\beta_1 + \alpha = \beta_2 + \alpha$ זה לא אומר ש$\beta_1 = \beta_2$
2. אם $\beta_1 < \beta_2$ זה לא אומר ש$\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$

דוגמא נגדית:

$$0 + \omega = 1 + \omega$$

וכמובן ש$0 \neq 1$, וכן $0 \not< 1$

טענה: אם $\alpha < \beta$, קיים סודר δ כך ש$\beta = \alpha + \delta$. (ולמעשה מתכונה 2 הסודר הנ"ל יחיד).

הוכחה: ראיתם בתרגול ש$\delta = otp(\beta \setminus \alpha)$ זה יעבוד.

טענה: פעולת החיבור רציפה, במובן הבא: אם β סודר גבולי, אז

$$\alpha + \beta = \sup_{\gamma < \beta}\{\alpha + \gamma\}$$

הוכחה: ראשית, מתכונה 3 נקבל שלכל $\gamma < \beta$, $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$.

צריך להוכיח שהוא הסודר הראשון שגדול מכולם.

יהי $\delta < \alpha + \beta$.

אם $\delta \leq \alpha$ אז $\alpha + 1 \in \{\alpha + \gamma\}_{\gamma < \beta}$ והוא גדול ממש מδ.

אחרת, $\alpha < \delta$. אז קיים סודר ϵ כך ש$\delta = \alpha + \epsilon$.

$\alpha + \epsilon < \alpha + \beta$.

אז ניתן להסיק ש$\epsilon < \beta$ אחרת, אם $\epsilon = \beta$ אז מתכונה 2 $\alpha + \epsilon = \alpha + \beta$.

ואם $\epsilon > \beta$ אז מתכונה 3 $\alpha + \epsilon > \alpha + \beta$.

מכיוון שβ גבולי, $\epsilon < \epsilon + 1 < \beta$. ולכן

$$\delta = \alpha + \epsilon < \alpha + (\epsilon + 1) \in \{\alpha + \gamma\}_{\gamma < \beta}$$

הוכחנו שכל איבר שקטן מ$\alpha + \beta$, יש בקבוצה מישהו שגדול ממנו ממש, לכן $\alpha + \beta$ הוא האיבר הראשון שגדול שווה מכל איברי הקבוצה. כלומר, הוא הסופרימום.

כפל סודרים:

יהיו α, β סודרים,

$$\alpha \cdot \beta = otp(\alpha \times \beta)$$

אשר מוגדרת עם יחס הסדר המילוני הימני.

ראיתם בתרגול שיחס סדר מילוני ימני על קבוצות סדורות היטב הוא קבוצה סדורה היטב ולכן יש לה טיפוס סדר.

הוכ מוגדר כך:

$$(a, b) < (c, d)$$

אם $b < d$ אם $b = d \wedge a < c$.

לדוגמא:

$$2 \cdot \omega = otp(\{0, 1\} \times \omega) = \omega$$

$$(0,0) < (1,0) < (0,1) < (1,1) < (0,2) < (1,2) <$$

$$f(0,n) = 2n - 1$$

$$f(1,n) = 2n$$

$$(1,m),(0,n) : m < n$$

$$2m < 2n - 1$$

אבחנה: כפל סודרים אינו קומוטטיבי.
לדוגמא:

$$2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$$

הוכחה: $2 \cdot \omega = \omega$.
$\omega \neq \omega \cdot 2$. דרך אחת לראות את זה: $(0,1) \in \omega \times 2$ הרישא שהוא יוצר מתאימה לסודר גבולי. ובω כל האיברים חוץ מ0 הם עוקבים.
דרך שניה לראות את זה: נשים לב ש

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

ממש מהגדרה. שניהם שווים ל

$$otp(\omega \times \{0,1\})$$

ו$\omega > 0$, לכן $\omega + \omega > \omega + 0 = \omega$.
תכונות:
1. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
2. $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
3. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$
4. אסוציאטיביות. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
5. אם $\alpha \neq 0$ ו$\beta_1 < \beta_2$ אז $\alpha\beta_1 < \alpha\beta_2$.
6. אם $\alpha \neq 0$ ו$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$ אז $\beta_1 = \beta_2$.

הוכחה:
1.

$$\alpha \cdot 0 = otp(\alpha \times \emptyset) = otp(\emptyset) = 0$$

כנ"ל לגבי הכפל בכיוון השני.

.2

$$\alpha \cdot 1 = otp(\alpha \times \{0\}) = \alpha$$

$$1 \cdot \alpha = otp(\{0\} \times \alpha) = \alpha$$

.3

$$\alpha \cdot 2 = otp(\alpha \times \{0,1\}) = otp(\alpha \oplus \alpha) = \alpha + \alpha$$

.4

$$(\alpha\beta)\gamma \cong (\alpha \times \beta) \times \gamma$$

$$\alpha(\beta\gamma) \cong \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

$$f : (\alpha \times \beta) \times \gamma \to \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

$$f((a,b),c) = (a,(b,c))$$

קל לראות שזה איזומורפיזם סדר.
למעשה, ניתן לומר ששתי הקבוצות איזומורפיות סדר לקבוצה

$$\alpha \times \beta \times \gamma$$

עם סדר מילוני ימני.

5. נניח ש$\alpha \neq 0$ ו$\beta_1 < \beta_2$. אז β_1 הוא רישא של β_2.

$$\alpha \times \beta_1$$

הוא רישא נאותה של

$$\alpha \times \beta_2$$

העובדה שזה רישא- ברורה. למה נאותה? כי $(0, \beta_1) \in \alpha \times \beta_2 \setminus \alpha \times \beta_1$.
ולכן

$$otp(\alpha \times \beta_1) < otp(\alpha \times \beta_2)$$

6. נניח ש$\alpha \neq 0$ ו$\alpha\beta_1 = \alpha\beta_2$.
אם $\beta_1 \neq \beta_2$ אז בה"כ $\beta_1 < \beta_2$, ואז $\alpha\beta_1 < \alpha\beta_2$.
טענה: מתקיים פילוג מימין. כלומר $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

הוכחה:

$$\alpha(\beta+\gamma) \cong \alpha \times (\beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\})$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (\alpha \times \beta) \times \{0\} \cup (\alpha \times \gamma) \times \{1\}$$

$$f : \alpha \times (\beta \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\}) \to (\alpha \times \beta) \times \{0\} \cup (\alpha \times \gamma) \times \{1\}$$

$$f(a,(b,c)) = ((a,b),c)$$

צריך להוכיח שזה אכן איזומורפיזם סדר.
הערה: לא מתקיים פילוג משמאל. כלומר, $(\beta+\gamma)\alpha$ לא בהכרח שווה ל$\beta\alpha+\gamma\alpha$.
דוגמא: נקח

$$\beta = \gamma = 1, \alpha = \omega$$

$$(\beta+\gamma)\alpha = (1+1)\omega = 2\omega = \omega$$

$$\beta\alpha + \gamma\alpha = 1\omega + 1\omega = \omega + \omega \neq \omega$$

אינדוקציה טרנספיניטית:
בשביל להוכיח שטענה כלשהי נכונה על כל הסודרים, כלומר, $\varphi(\alpha)$ לכל $\alpha \in ON$, ניתן להשתמש באלגוריתם הבא שנקרא אינדוקציה טרנספיניטית:
נוכיח שלכל α,

$$[\forall\beta < \alpha\varphi(\beta)] \to \varphi(\alpha)$$

אז לכל סודר $\varphi(\alpha)$.
הוכחה: נניח ש$\varphi(\alpha)$ לא מתקיים לכל הסודרים. אז קיים סודר ראשון α שעבורו הטענה לא מתקיימת.
לכן $\forall\beta < \alpha, \varphi(\beta)$. מהנחת האינדוקציה, זה גורר את $\varphi(\alpha)$. סתירה.
דרך שקולה לאינדוקציה טרנספיניטית:
אם רוצים להוכיח שלכל $\alpha \in ON$, מתקיים $\varphi(\alpha)$, מספיק להוכיח:

1. $\varphi(0)$
2. $\forall\beta, \varphi(\beta) \to \varphi(\beta+1)$
3. לכל $\alpha \neq 0$ גבולי, $[\forall\beta < \alpha\varphi(\beta)] \to \varphi(\alpha)$.

הוכחה: נניח ש$\varphi(\alpha)$ לא מתקיים לכל סודר α. אז יהי α הסודר הראשון שעבורו הטענה לא מתקיימת.
אם $\alpha = 0$- סתירה.
אם α עוקב, אז $\alpha = \beta+1$ עבור איזשהו β, בפרט, $\beta < \alpha$, אז $\varphi(\beta)$, וזה גורר את $\varphi(\beta+1 = \alpha)$.
אם α גבולי שאינו 0 , אז לכל $\beta < \alpha$, $\varphi(\beta)$, וזה גורר את $\varphi(\alpha)$.

טענה: הוכיחו שלכל סודר α, ולכל סודר β, $\beta \leq \alpha + \beta$.
הוכחה: נוכיח בעצם עבור סודר α מקובע, ועכשיו יש לנו טענה על כל הסודרים β. אז נעשה את זה באינדוקציה טרנספיניטית על β.

1. $\beta = 0$.

$$0 \leq \alpha + 0$$

2. נראה שאם

$$\beta \leq \alpha + \beta$$

אז

$$\beta + 1 \leq \alpha + (\beta + 1)$$

ובכן, מאסוציאטביות חיבור,

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$

והראינו ש$\gamma + 1$ זה בעצם הסודר העוקב. אז אם

$$\beta \leq (\alpha + \beta)$$

אז העוקב של β קטן שווה מהעוקב של $\alpha + \beta$.

3. יהיה β סודר גבולי, ונניח שלכל $\gamma < \beta$,

$$\gamma \leq \alpha + \gamma$$

$$\beta = \sup_{\gamma < \beta} \{\gamma\} \leq \sup_{\gamma < \beta} \{\alpha + \gamma\} = \alpha + \beta$$