אינפי II תירגולים - תרגול VII

תזכורת

* תהי f פונ' בקטע סגור. אם f חסומה ויש לה מס' סופי של נק' אי רציפות אזי היא אינטגרבילית שם.
* נאמר שקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ היא אפסית (או בעלת מידה 0) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים אוסף בן-מניה של קטעים פתוחים $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ ומקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| < \varepsilon$$

* נאמר שתכונה מתקיימת כמעט בכל מקום (כב"מ) אם היא מתקיימת פרט לקבוצה אפסית.
* משפט לֶבֶג:

I. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי f רציפה כמעט בכל הקטע.

II. תהי f פונ' חסומה ב- $[a,b]$. אם f רציפה כמעט בכל $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית שם.

— סוף תזכורת —

תכונות האינטגרל המסוים

(I) אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ אזי גם $f\cdot g$

(II) " ——— " ——— ו-$|g| \geq c > 0$ אזי המנה $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית גם.

(III) אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית בכל תת קטע $[c,d] \subseteq [a,b]$

(IV) אדיטיביות באינטגרל: אם f אינטגרבילית ב-$[a,b],[b,c]$ אזי: $\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$

(V) לינאריות באינטגרנד (גם): אם f,g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b (f+cg)\,dx = \int_a^b f\,dx + c\cdot\int_a^b g\,dx$$

(VI) אם $f \leq g$ כנ"ל אזי $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$

(VII) $\int_a^a f\,dx = 0$, ועבור $a<b$ מגדירים $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$

(VIII) אי שוויון המשולש האינטגרלי: אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אזי גם $|f|$ ומקיימים:

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

(ולכן: $\left|\int_a^b f+g\,dx\right| \leq \int_a^b |f+g|\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx + \int_a^b |g|\,dx$)

משפט (משפט הערך הממוצע האינטגרלי):

יהיו f רציפה ב-$[a,b]$, $0 \leq g$ בקטע (או $g \leq 0$ בקטע) ואינטגרבילית. אזי, קיים $c \in [a,b]$ כך ש-$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

אבחנה: אם ניקח $g \equiv 1$ בקטע, אז מקבלים כי קיים $c \in [a,b]$ כך ש-$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$

תרגיל

קבע עבור הטענות הבאות אם הן נכונות או לא:

(I) $\int_0^1 \sin(x^3)\,dx \geq \int_0^1 \sin(x^2)\,dx$

לא נכון! $\sin(x^n)$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$ (כי רציפה שם). בקטע זה, $\sin(\cdot)$ מונוטונית עולה וכן $x^3 \leq x^2$, לכן לכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $\sin(x^3) \leq \sin(x^2)$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \sin(x^3)\,dx \leq \int_0^1 \sin(x^2)\,dx$$

$\int_0^1 \sin x^2 dx \ge 1$ (I)

לא נכון! $\sin(\cdot) \le 1$ בקטע $[0,1]$ והשלמת שיקולים של (I) הטענה שגויה.

$\int_0^1 \sin x^3 dx = \sin(c^3)$ לכל $c\in[0,1]$ (III)

לא נכון! עבור $c=0$ מתקיים $\sin(0)=0$, אך האינטגרל חיובי.

(IV) קיים $c\in[0,1]$ כך ש- $\sin(c^2)=\int_0^1 \sin(x^3)\,dx$

נכון! לפי משפט הערך הממוצע האינטגרלי יש $c\in[0,1]$ כך ש- $\sin(c^3)=\int_0^1 \sin(x^3)dx$

נגדיר $\tilde{c} = c^{\frac{2}{3}}$. כיוון ש- $c\in[0,1]$ אזי גם $\tilde{c}$ מקיים הדרוש. □

<u>תרגיל</u>

הוכיחו:
$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le 2e^2$$

הפונ' $f(x)=e^{x^2-x}$ רציפה ב- $[0,2]$ ולכן אינט' שם, וממשפט ויירשטראס הוא מקבל מינימום ומקסימום שם. נמצא אותם (ע"י חקירת פונ'):

$$f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x=\frac{1}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$$

$f''(x) = 2e^{x^2-x}+(2x-1)e^{x^2-x} = (2x+1)e^{x^2-x}$ ולכן חיובית ב- $x=\frac{1}{2}$, כלומר זוהי מינימום.

נותר למצוא מקס' בקטע, נמצא אותו ע"י חישוב הערך בקצוות:

$f(0)=1,\quad f(2)=e^2 \Longrightarrow$ מקס' $(2,e^2)$

מסקנה:
$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} = \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le \int_0^2 e^2 dx = 2e^2$$
□

המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי:

משפט

(I) אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אזי $\Phi(x):=\int_a^x f(t)dt$ רציפה שם

(II) המשפט היסודי: תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ותהי $\Phi(x):=\int_a^x f(t)dt$.
אזי $\Phi'(x)=f(x)$ בכל נק' הרציפות של f.

(III) הנוסחה היסודית של החשבון האינפיניטסימלי (ניוטון-לייבניץ): אם f רציפה ב- $[a,b]$
ו- Φ פונ' קדומה של f, אזי $\int_a^b f\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$. סימון: $\Phi(x)\Big|_a^b:=\Phi(b)-\Phi(a)$

(IV) הכללה: אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ו- Φ רציפה בקטע, ופרט למס' סופי
של נק' Φ גזירה בפנים הקטע ומקיימת $\Phi'(x)=f(x)$ אזי $\int_a^b f\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$

תרגיל (ממבחן תשע"ג)

יהיו $0<a<b$. הוכיחו כי $\int_a^b \ln x\,dx\le\frac{b^2-a^2}{2}$

לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\ln x\le x$

$$\Rightarrow \int_a^b \ln x\,dx\le\int_a^b x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}$$

□

תרגיל

הוכיחו כי: $\frac{1}{2e}\ln 2\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-x^2}\tan x\,dx\le\frac{1}{2}\ln 2$

נסמן $f(x)=e^{-x^2}$, $g(x)=\tan(x)$. בקטע $[0,\frac{\pi}{4}]$ מתקיים כי $\tan x\ge 0$, ולכן

משפט הערך הממוצע האינטגרלי קיים $c\in[0,\frac{\pi}{4}]$ עבורו

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-x^2}\tan x\,dx=e^{-c^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-x^2}\tan x\,dx=e^{-c^2}\cdot-\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=e^{-c^2}\cdot\left(-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\ln(\cos 0)\right)=e^{-c^2}\cdot\left(-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-c^2}\cdot\frac{1}{2}\ln 2$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$

כיוון ש- $0\le c\le\frac{\pi}{4}<1$ $\Leftarrow$ $1<-c^2\le 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e} < e^{-c^2} \leq 1 \qquad (\text{לפי מונוטוניות עולה})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2e}\ln 2 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x^2} \operatorname{tg} x \, dx \leq \frac{1}{2}\ln 2$$

$\square$

תרגיל

חשבו את $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overbrace{\frac{1}{n}}^{\Delta x_k}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{k}{n}}}_{f(\alpha_k)}$$

נשים לב כי עבור הפונ' $f(x) = \frac{1}{1+x}$ יחד עם החלוקה השווה של $[0,1]$ מתקיים

כי

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \qquad (\text{כי הפונ' מונוטונית יורדת})$$

נציין ש-f רציפה ב-$[0,1]$ כולל בקצה $(x=0)$ ולכן היא אינטגרבילית שם ומתקיים:

$$S = \lim_{n\to\infty}\underline{S} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \underset{\text{המשפט היסודי}}{=} \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2$$

תרגיל

חשבו את $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}$

נשים לב כי מתקיים:

$$\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k} = \overbrace{\frac{1}{n}}^{\Delta x_k}\overbrace{\left(\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}\right)}^{f(\alpha_k)}$$

ואם נגדיר את $f(x) = xe^x$ ואת החלוקה השווה של $[0,1]$

$$\Rightarrow \quad \overline{S} = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \beta_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}\right) \qquad (\text{כי הפונ' מונוטונית עולה})$$

f אינטגרבילית בקטע כי רציפה שם ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k} = \lim_{n\to\infty}\overline{S} = \int_0^1 xe^x\,dx = \ldots = 1$$

<u>תרגיל</u> (ממבחן של פרופ' בכלון)

לכל $x\in[-1,1]$ את הפו' $f(x)=\int_{-1}^{x}|t|\,dt$

<u>א.</u> בטאו את הפו' $f(x)$ בצורה מפורשת

<u>ב.</u> מצאו את הנק' בהן f רציפה

<u>ג.</u> מצאו את הנק' בהן f גזירה

<u>א.</u> נסמן $g(t)=|t|$. אזי $g(t)$ רציפה $\to [-1,1]$ אם כך לפי ניוטון-לייבניץ:

$$f(x)=\int_{-1}^{x}|t|\,dt=\begin{cases}-\int_{-1}^{x} t\,dt & ,x\leq 0\\ -\int_{-1}^{0} t\,dt+\int_{0}^{x} t\,dt & ,x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2} & ,x\leq 0\\ \frac{1}{2}+\frac{x^2}{2} & ,x>0\end{cases}$$

<u>ב.</u> כיוון ש- $g(t)=|t|$ רציפה ב-$[-1,1]$ אזי הפו' אינטגרבילית, ומהמשפט היסודי נקבל ש- $f(x)$ רציפה בכל נקודה

<u>ג.</u> כיוון ש- g רציפה בכל $[-1,1]$ (ולכן אינט' שם), נקבל מהמשפט היסודי ש- $f'(x)=g(x)$ בכל נק' הרציפות של g, כלומר f גזירה בכל הנקודות.

<u>תרגיל</u> (ממבחן 2017)

נגדיר עבור $x\in\mathbb{R}$: $F(x):=\int_{0}^{x}e^{t^2}dt$. הוכיחו כי קיים במדויק $c\in(0,1)$ יחיד ש- $F(c)=1$

נשים לב כי $F(x)$ רציפה ב-$[0,1]$ כיוון ש- $f(x)=e^{x^2}$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$ (רציפה בקטע סגור).

בנוסף, מתקיים: $F(0)=\int_{0}^{0}e^{t^2}dt=0$

עבור החלוקה $P: 0<\frac{1}{2}<1$ של $[0,1]$ מתקיים:

$$F(1)=\int_{0}^{1}e^{t^2}dt\underset{\text{לפי הגדרה}}{\geq}\underline{S}=\frac{1}{2}e^{0^2}+\frac{1}{2}e^{(\frac{1}{2})^2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

בנוסף, כיוון ש- $f(x)=e^{x^2}$ חיובית בקטע, מתקיים כי $F(x)$ מונוטונית עולה ממש,

ולכן ממשפט ערך הביניים קיים נק' אחת ויחידה $c\in(0,1)$ כך ש- $F(c)=1$ □

מסקנה משפט ניוטון-לייבניץ (בלי הוכחה)

אם $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ (כאשר f רציף), אז, לכל x בתחום ההגדרה מתקיים:

$$F'(x) = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

דוגמה

נחשב את $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\cos t\,dt$

אז לפי הנוסחה נקבל $\varphi'(x)=\cos(x^2)\cdot(x^2)'-\cos(x)\cdot(x)' = \cos(x^2)2x-\cos x$

תרגיל

הוכיחו כי למשוואה $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x$ יש פתרון יחיד ומצאו אותו

פתרון: $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt - x$. $f(t)=e^{t^2}$ רציפה ולכן אינטגרבילית בכל $[0,x]$ (או $[x,0]$ עבור $x<0$) ולכן $F(x)$ רציפה וגזירה ומקיימת (מהמשפט היסודי):

$$F'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt - x\right)' = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' + (-x)' = e^{-x^2}-1$$

נשים ♥ כי לכל x, $F'(x)=e^{-x^2}-1\le 0$, ולכן $F(x)$ מונוטונית יורדת

וכיוון שהיא רציפה, קיים פתרון יחיד (אם יש חיתוך עם ציר x).

קל לראות ש $F(0)=\int_0^0 e^{-t^2}dt-0=0$ ולכן קיים פתרון יחיד למשוואה והוא ב-$x=0$ □

תרגיל

מצאו את כל הקיצון של הפונק' $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ כאשר $x>0$

נשים ♥ כי יש לפונק' אי הגדרה ב-$t=0$ אך הגבול שם קיים. נגדיר:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

וכעת $g(x)$ אינטגרבילית ב-$[0,x]$ ולכן מתקיים $F(x)=\int_0^x g(t)\,dt$

$$\Longrightarrow F'(x)=\frac{\sin x}{x}=0 \iff \sin x=0 \iff x=\pi n,\ n\in\mathbb{N} \quad (\text{כי } x>0)$$

$$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

נסווג את כל הקיצון!

⊛ אם $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}$) אזי $F''(\pi n)=F''(2\pi k)=\frac{1}{2\pi k}>0$

⊛ אם $n=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$) אזי $F''(\pi n)=F''((2k+1)\cdot\pi)=\frac{-1}{\pi(2k+1)}<0$

$\Downarrow$

לכן מינימום: $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{N}$; לכן מקסימום: $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{N}$

<u>תרגיל</u>

חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_{-x}^{x}\ln(1+\sin^2(t))\,dt$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_{-x}^{x}\ln(1+\sin^2(t))\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x\ln(1+\sin^2(t))\,dt}{x^3}\ \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}$$

כי $\ln(1+\sin^2(t))$ רציפה

$$\underset{\text{המשפט היסודי}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+\sin^2(x))}{3x^2}\ \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{לופיטל}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{1+\sin^2x}\cdot\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}}{6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\sin^2x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1}=\frac{1}{3}$$

<u>תרגיל</u>

הוכיחו/הפריכו:

<u>א.</u> אם $\int_a^b f(x)\,dx=0$ אזי $f(x)=0$ כב"מ

<u>הפרכה:</u> f כל פונ' אי זוגית שונה $=0$ כב"מ בתחום סימטרי סביב 0 $[-a,a]$ עונה

על הדרישה

<u>ב.</u> נניח $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$. אזי $f=g$ כב"מ

<u>הפרכה:</u> f כל פונ' אי זוגית שונה $=0$ כב"מ ו- $g=-f(x)$ בתחום $[-a,a]$