חשבו חבורת גלואה של שדה פיצול של
הפ"מ של $\theta = \sqrt{3+\sqrt{3}}$.

פתרון: נסמן ב- K שדה הפיצול. הפ"מ של θ:

$$m_\theta(x) = x^4 - 6x^2 + 6$$

(אי"פ לפי אייזנשטיין.)

קל למצוא את יתר השורשים:

$\eta := \sqrt{3-\sqrt{3}}$, $-\eta$, $-\theta$

$K = \mathbb{Q}(\theta, \eta)$

דיאגרמה עד כאן:

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, dash, "?"'] \arrow[dr, dash, "?"] & \\
\mathbb{Q}(\theta) \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}(\eta) \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[d, dash, "2"'] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

$\sqrt{3} = \theta^2 - 3 =$
$= 3 - \eta^2$

לא נכון כי $\eta \in \mathbb{Q}(\theta)$, שהרי אז:

$\mathbb{Q}(\theta) \ni \sqrt{3}$, $\sqrt{6} = \eta\theta \Rightarrow \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

וחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (סתירה מעגל).

אבל יהי σ אוטו' של $K = \mathbb{Q}(\theta)$,

לכן היינו בשלילה המעתיק $\sigma(\theta) = \eta$,
(יש כזה כי שניהם שורשים של אותו פולי', ממשפט "הרמות")

לו האוטומורפיזם של אקליד הוא מסדר 2 נקבל:

$$\sigma(\eta) = \theta$$

ולכן $\theta + \eta \in K^{\sigma} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\theta+\eta):\mathbb{Q}] \le 2$

עם זאת נחשב כי $\theta+\eta$ מאפס את:

$$(\theta+\eta)^2 = 6 + 2\theta\eta = 6 + 2\sqrt{6}$$

$$(\lambda^2-6)^2 - 24 \Rightarrow \lambda^4 - 12\lambda^2 + 12$$

אך לכן אייזנשטיין $\Leftarrow$ סתירה.

לסיכום הדיאגרמה היא אכן:

$$\begin{tikzcd}
 & K=\mathbb{Q}(\theta,\eta) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
\mathbb{Q}(\theta) \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}(\eta) \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[d, dash, "2"] & \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

הוא:

$$\underbrace{\eta^2 - 3 + \sqrt{3} = 0}_{\text{פולינום מינימלי מעל } \mathbb{Q}(\theta)}$$

יהי σ אוטו' של K המעגלי:

$$\sigma(\theta)=\eta$$

נבדוק מהו $\sigma(\eta)$.

כפי שראינו לעיל $\sigma(\eta)\neq\theta$. ברור גם כי $\sigma(\eta)\neq\eta$, ומוכרח להיות אחד מבין השורשים הנותרים: $\{-\theta,-\eta\}$.

נניח אם $\sigma(\eta)=-\eta$ אז $\sigma(-\eta)=\eta$

$$\theta \xmapsto{\sigma} \eta \xmapsto{\sigma} -\eta \xmapsto{\sigma} \eta$$

משמע $\theta=-\eta$ וכבר הראינו קודם כי $\eta\notin\mathbb{Q}(\theta)$.

לכן מוכרח להתקיים:

$$\begin{tikzcd}
\theta \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & \eta \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & -\theta \arrow[r, mapsto, "\sigma"] & -\eta \arrow[lll, mapsto, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

בנוסף, מהמשפט גלואה יש T מסדר 2 כך ש-

$$\mathbb{Q}(\theta)=K^T$$

משמע: $\left.\begin{array}{l} T(\eta)=-\eta \\ T(-\eta)=\eta \end{array}\right\}$ אחרת $T=id$

כי $\mathbb{Q}(\theta)=K^T$: $\left\{\begin{array}{l} T(\theta)=\theta \\ T(-\theta)=-\theta \end{array}\right.$

נג"ל: $\theta = "1",\ \eta = "2",\ -\theta = "3",\ -\eta = "4"$

ונקבל:

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$$

$$\tau = (2\ 4)$$

קיבלנו

$$G = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_4$$

$\blacksquare$