

האם קיימת תחבורה של  $\sqrt{3}$  ו- $\sqrt{3}$  על  $\mathbb{Q}$ ?

$\theta = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$       על  $\mathbb{Q}$

המונומיאל  $M_\theta(x) = x^4 - 6x^2 + 6$  הוא הפולינום המינימלי של  $\theta$  על  $\mathbb{Q}$ .

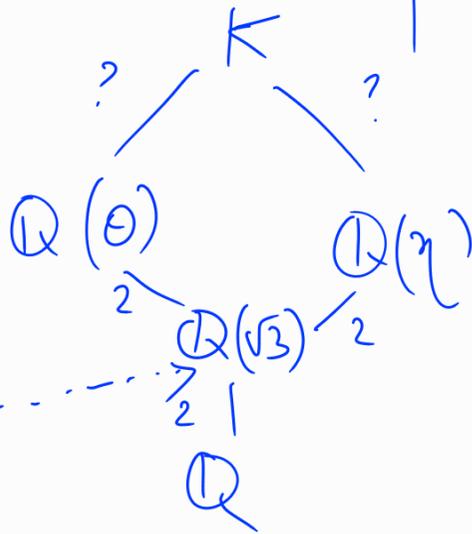
הפולינום  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 6$  אינו פולינום ריבועי על  $\mathbb{Q}$ .

לכן  $\mathbb{Q}(\theta)$  הוא תחבורה של  $\mathbb{Q}$  ו- $\mathbb{Q}(\eta)$  הוא תחבורה של  $\mathbb{Q}$ .

$\eta := \sqrt{3 - \sqrt{3}}$ ,  $-\eta$ ,  $-\theta$

$K = \mathbb{Q}(\theta, \eta)$

התחבורה  $K$  היא  $\mathbb{Q}(\theta, \eta)$ .



$\sqrt{3} = \theta^2 - 3 = 3 - \eta^2$

לכן  $\eta \in \mathbb{Q}(\theta)$  ו- $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\theta)$ .

$\mathbb{Q}(\theta) \ni \sqrt{3}, \sqrt{6} = \eta\theta \Rightarrow \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

התחבורה  $\mathbb{Q}(\theta)$  היא  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (התחבורה של  $\sqrt{2}$  ו- $\sqrt{3}$ ).

$\mathbb{Q}(\theta) = K$  על ידי  $\sigma$  והוא

$\sigma(\theta) = \eta$  (ההיפוך של  $\theta$ )  
 (יש כוונה כי  $\sigma$  הוא איזומורפיזם של  $K$  על  $K$  שמקיים  $\sigma^2 = \text{id}$ )

15. האתגר הוא להראות כי  $[K:\mathbb{Q}] = 2$

$$\sigma(\eta) = \theta$$

$$[\mathbb{Q}(\theta + \eta) : \mathbb{Q}] \leq 2 \iff \theta + \eta \in K^\sigma$$

כלומר  $\theta + \eta$  הוא איבר ב- $K^\sigma$

$$(\theta + \eta)^2 = 6 + 2\theta\eta = 6 + 2\sqrt{6}$$

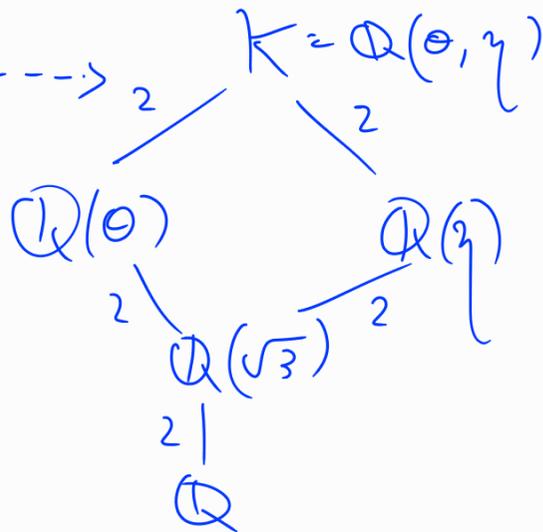
$$(\lambda^2 - 6)^2 - 24 \Rightarrow \lambda^4 - 12\lambda^2 + 12$$

כלומר  $\lambda^4 - 12\lambda^2 + 12 = 0$  הוא המינימום של  $\lambda^2 - 6$

לכן  $[K:\mathbb{Q}] = 2$

$$\eta^2 - 3 + \sqrt{3} = 0$$

הוא המינימום של  $\eta$  על  $\mathbb{Q}(\theta)$



היחס  $\sigma$  על  $K$  נקרא "היחס הריבועי"

$$\sigma(\theta) = \eta$$

היחס  $\sigma(\eta)$  הוא

כאשר  $\sigma(\eta) \neq \theta$  ו- $\sigma(\eta) \neq \eta$  (כי  $\sigma(\eta) = \theta$  או  $\sigma(\eta) = \eta$  יתנו סתירה)

היחס  $\sigma$  הוא:  $\{-\theta, -\eta\}$

$$\sigma(-\eta) = \eta \quad \text{וכי} \quad \sigma(\eta) = -\eta$$

$$\theta \xrightarrow{\sigma} \eta \xrightarrow{\sigma} -\eta \xrightarrow{\sigma} \eta$$

היחס  $\sigma$  הוא היחס הריבועי על  $\mathbb{Q}(\theta)$  כי  $\theta = -\eta$  ו- $\eta = -\theta$  (כי  $\sigma(\theta) = \eta$  ו- $\sigma(\eta) = -\eta$ )

$$\theta \xrightarrow{\sigma} \eta \xrightarrow{\sigma} -\theta \xrightarrow{\sigma} -\eta$$

$\sigma$

היחס  $\tau$  הוא היחס הריבועי על  $\mathbb{Q}(\theta)$  כי  $\tau(\theta) = \theta$  ו- $\tau(\eta) = -\eta$  (כי  $\tau(\eta) = -\eta$  ו- $\tau(-\eta) = \eta$ )

$$\mathbb{Q}(\theta) = K^T$$

$$\mathbb{Q}(\theta) = K^T \begin{cases} \tau(\theta) = \theta \\ \tau(-\theta) = -\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \tau(\eta) = -\eta \\ \tau(-\eta) = \eta \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{יחס הריבועי} \\ \text{על } K \\ \tau = \text{id} \end{matrix}$$

$\theta = "1"$ ,  $\eta = "2"$ ,  $-\theta = "3"$ ,  $-\eta = "4"$  :  
الترتيب

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$\tau = (2 \ 4)$$

مجموع

$$G = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_4$$

